Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Бисимуляционная игра Эренфойхта для предикатных моделей Крипке с постоянной областью

Маслов Николай Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории алгоритмов, Москва, Россия

E-mail: polsovatel06@gmail.com

Хорошо известны 2 результата об определимости, сформулированные в виде игры: один касается классической логики и использует игру Эренфойхта [3], второй касается модальной логики и использует бисимуляционную игру [1]. Оказывается возможным сформулировать аналогичный результат для модальной логики предикатов (в модели с постоянными областями [2]); для этого понадобится сформулировать новое определение игры, представляющее из себя некоторую смесь известных нам игр.

Определение. Будем называть *отмеченной моделью* тройку $(M, w, (a_1, \dots a_m))$, где $M = (W, R, D)$ — предикатная модель Крипке с постоянной областью, $w \in W$, $(a_1, \dots a_m) \in D^m$.

Определение. Мы говорим, что две отмеченные модели $(M, u, (a_1, \dots a_m))$ и $(M', u', (a'_1, \dots a'_m))$ *модально эквивалентны до глубины n и кванторно эквивалентны до глубины k* (обозначение: $(M, u, (a_1, \dots a_m)) \equiv_{n;k} (M', u', (a'_1, \dots a'_m)))$, если в них истинны одни и те же (с точностью до частичного изоморфизма) оценённые (соотв., на $(a_1, \dots a_m)$ и на $(a'_1, \dots a'_m)$) формулы с m параметрами $A(v_1, \dots, v_m)$ модальной глубины не более n, а кванторной - не более k: $M, u \models [a_1/v_1, \dots, a_m/v_m]A \Leftrightarrow M, u' \models [a'_1/v_1, \dots, a'_m/v_m]A$.

Определение. Пусть даны две отмеченные модели: $(M, w, (a_1, \dots a_m))$ и $(M', w'(a'_1, \dots a'_m))$. *Бисимуляционной $(n; k)$ игрой Эренфойхта* называется игра 2 игроков (Новатор и Консерватор, далее **Н** и **К**). Новатор может сделать один из 2 ходов:

1) Перейти в одной из моделей в мир, связанный с предыдущим отношением R (или в M' по R'). Консерватор обязан ответить в другой модели по соответствующему отношению;

или:

2) Выбрать в одном из носителей некоторый индивид[1]. Консерватор отвечает в другой модели. Эти индивиды добавляются к соответствующим выделенным кортежам отмеченных моделей.

Оба игрока обязаны совершить n ходов по шкале и k ходов внутри множества индивидов.

Позицией после каждой пары ходов (а также начала игры) является упорядоченная пара отмеченных моделей $((M, u, (a_1 \dots a_l)), (M', u', (a'_1 \dots a'_l)))$. Новатор выигрывает, если эти модели не $(0, 0)$-эквивалентны или Консерватор не может сделать очередной ход.

Консерватор выигрывает, если Новатор не может сделать очередной ход, а также если Консерватор совершил все требуемые ходы и не проиграл.

Если модели не $(0, 0)$-эквивалентны, то существует некая атомарная формула, истинная в одной отмеченной модели и ложная в другой. Мы будем называть такие формулы

[1] Очевидно, в случае непостоянных областей индивид будет выбираться на тех множествах, до которых добрались игроки к данному шагу.

(необязательно атомарные) *различающими.*

Определение. Зададим индукцией по (n,k) формулы:

$$\chi^{0;0}_{(M,w,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots,v_p) =$$
$$= \bigwedge_{\substack{M,w\models [a_1/v_1,\dots,a_p/v_p]A(v_1,\dots,v_p),\\ A \text{ атомарная}}} [a_1/v_1,\dots,a_p/v_p]A(v_1,\dots,v_p) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{\substack{M,w\not\models [a_1/v_1,\dots,a_p/v_p]A(v_1,\dots,v_p),\\ A \text{ атомарная}}} \neg[a_1/v_1,\dots,a_p/v_p]A(v_1,\dots,v_p)$$

Шаг при $n,k>0$:

$$\chi^{n;k}_{(M,w,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots,v_p) = \chi^{0;0}_{(M,w,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots v_p)\wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{wRu} \Diamond\chi^{n-1;k}_{(M,u,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots v_p) \wedge \Box \bigvee_{wRu} \chi^{n-1;k}_{(M,w,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots v_p)\wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{a\in D} \exists v_{p+1}\chi^{n;k-1}_{(M,w,(a_1,\dots a_p,a))}(v_1,\dots,v_p,v_{p+1}) \wedge \forall v_{p+1} \bigvee_{a:a\in D} \chi^{n;k-1}_{(M,w,(a_1,\dots a_p,a))}(v_1,\dots,v_p,v_{p+1})$$

При $k=0, n>0$:

$$\chi^{n;0}_{(M,w,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots,v_p) = \chi^{0;0}_{(M,w,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots v_p)\wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{wRu} \Diamond\chi^{n-1;0}_{(M,u,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots v_p) \wedge \Box \bigvee_{wRu} \chi^{n-1;0}_{(M,w,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots v_p)$$

При $k>0, n=0$:

$$\chi^{n;0}_{(M,w,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots,v_p) = \chi^{0;0}_{(M,w,(a_1,\dots a_p))}(v_1,\dots v_p)\wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{a\in D} \exists v_{p+1}\chi^{n;k-1}_{(M,w,(a_1,\dots a_p,a))}(v_1,\dots,v_p,v_{p+1}) \wedge \forall v_{p+1} \bigvee_{a:a\in D} \chi^{n;k-1}_{(M,w,(a_1,\dots a_p,a))}(v_1,\dots,v_p,v_{p+1})$$

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) Консерватор имеет выигрышную стратегию в бисимуляционной $(n;k)$ игре Эренфойхта с начальной позиции $((M,w,(a_1,\dots a_m)),\ (M',w',(a'_1,\dots,a'_m)))$;

2) $(M,w,(a_1,\dots a_m)) \equiv_{n;k} (M',w',(a'_1,\dots a'_m))$;

3) $M',w' \models \chi^{n;k}_{(M,w,(a_1,\dots,a_m))}(a'_1,\dots a'_m)$.

Источники и литература

1) P. Blackburn, J. van Benthem Modal Logic: A Semantic Perspective// in P. Blackburn (ed.) Handbook of Modal Logic, Volume 3. Elsevier Science. 2006.

2) D. Gabbay, V. Shehtman, D. Skvortsov Quantification in Nonclassical Logic. Volume 1: Draft of the second corrected edition// 2012

3) L. Libkin Elements of Finite Model Theory // Springer. 2012.