Секция «Геометрия и топология»

Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон

Шаров Фёдор Александрович

Студент (бакалавр)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Факультет математики, Москва, Россия

E-mail: fedorsharov@mail.ru

Задачи на разрезания с давних пор привлекают людей своей наглядностью и в то же время своей сложностью. В докладе будет решена следующая задача: *пусть дан набор из n прямоугольников, отношения сторон которых — квадратичные иррациональности; требуется выяснить, какие прямоугольники можно разрезать на подобные данным прямоугольникам, а какие — нельзя.* Похожие задачи рассматривались другими математиками: Фрайлингом, Ласковичем, Ринном (см. [1]), Китингом и Кингом (см. [2], [3]).

Ответ на эту задачу даёт следующая теорема, которая является основным нашим результатом.

Основная теорема. Пусть $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, ..., $x_n = a_n + b_n\sqrt{p}$ — такие числа, что $x_i > 0$, $a_i, b_i, p \in \mathbb{Q}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Тогда:

1) если существуют такие числа i и j, что $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $0 > (a_i - b_i\sqrt{p})(a_j - b_j\sqrt{p})$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон x_1, ..., x_n тогда и только тогда, когда

$$z \in \{e + f\sqrt{p} > 0 \,|\, e, f \in \mathbb{Q}\};$$

2) если для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $a_i - b_i\sqrt{p} > 0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон x_1, ..., x_n тогда и только тогда, когда

$$z \in \left\{e + f\sqrt{p} \,|\, e, f \in \mathbb{Q}, e > 0, \frac{|f|}{e} \leqslant \max_i \frac{|b_i|}{a_i}\right\} =: M(x_1, \ldots, x_n);$$

3) если для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $0 > a_i - b_i\sqrt{p}$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон x_1, ..., x_n тогда и только тогда, когда

$$z \in \left\{e + f\sqrt{p} \,|\, e, f \in \mathbb{Q}, f > 0, \frac{|e|}{f} \leqslant \max_i \frac{|a_i|}{b_i}\right\} =: N(x_1, \ldots, x_n).$$

Источники и литература

1) C., M., and D., Rectangling a rectangle, Discr...~{17} (1997), 217-225.

2) K.and J.., Shape tiling, Elect...~{4:2} (1997), R12.

3) K.and J.., Signed tilings with squares, J..A~{85:1} (1999), 83–91.

Слова благодарности

Автор благодарен М. Б. Скопенкову за постоянное внимание к данной работе.