

Топологический анализ задачи о движении динамически симметричного эллипсоида вращения на гладкой плоскости.

Сечкин Георгий Михайлович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: ego-rish@ya.ru

Важным шагом в проведении топологического анализа является определение возможных трехмерных многообразий.

Следуя программе, описанной в разделе 5.2 второго тома [1], проведем анализ для определения всех типов изоэнергетических многообразий. Данный полезен для вычисления топологических инвариантов.

Для этого мы построим бифуркационную диаграмму отображения момента $\mathcal{F} = G \times H : S^2 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2(g, h)$. Изоэнергетические 3-многообразия на плоскости (g, h) задаются любой точкой плоскости.

Бифуркационная диаграмма этого отображения - образ множества критических точек. Её дуги делят плоскость на камеры, по теореме С.Смейла (сформулированной и доказанной в [1] том 2 стр. 201 или [2]), точкам внутри одной камеры соответствуют изоморфные 3-многообразия.

Опишем схему исследования:

1) В начале мы рассмотрим приведенный потенциал

$$\varphi_g(R) = \frac{(g + \langle \lambda; R \rangle)^2}{2\langle AR; R \rangle} + U(R), \quad (1)$$

обобщенной функции Гамильтона

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{S_i + \lambda_i}{2A_i} + U(\mathbf{R}). \quad (2)$$

Потенциал является функцией заданной на сфере Пуассона (\mathbf{S}, \mathbf{R}) .

2) Затем, для построения бифуркационной диаграммы $\varphi_g(R) = h$, найдем экстремальные точки приведенного потенциала $\varphi_g(R_3)$.

3) Подставляя их в уравнение и получим искомую диаграмму.

4) Для определения особенностей и их комбинации по графику функции $\varphi'_g(R)$ построим граф Роба, ребра которого схематично повторяют очертания $\varphi'_g(R)$, а вершины соответствуют критическим точкам, точное определение есть в [1].

Параметры присутствующие в задаче:

1) Мы работаем с эллипсоидом вращения, динамически симметричным, оси симметрии и вращения которого совпадают, центр масс лежит на этой оси на расстоянии s от геометрического центра.

1) A - третья компонента тензора инерции, $A \geq 0$. Случай $A = 0$ соответствует телу, у которого вся масса сосредоточена в экваториальной плоскости, случай $A = 1$ - равномерному распределению массы.

2) $c = b^2 - 1$ - мера сплюснутости эллипсоида, $c \geq -1$. Если тело является шаром, то $c = 0$, а если диском, то $c = -1$, при $c > 0$ и $0 > c > -1$ тело представляет собой вытянутый и сплюснутый эллипсоид соответственно. Верно следующее соотношение $0 \leq s < \sqrt{c + 1}$.

А так же как и ранее обозначим $x = R_3$.

Замечание (о числе критических значений): Поскольку $x \in [-1; 1]$, то значения $x = \pm 1$ - всегда являются критическими, но в зависимости от параметров A, c, s могут появляться дополнительные критические значения.)

Подставим значения параметров и потенциала в (1), получим выражение для $\varphi_g(x)$.

Утверждение. В нашем случае приведенный потенциал вид:

$$\varphi_g(x) = \frac{g^2}{2(1 + (A - 1)x^2)} + \left(\sqrt{1 + cx^2} + sx \right). \quad (3)$$

Поскольку, приведенный потенциал системы зависит лишь от одной координаты x , то, при произвольных значениях g и h , область на сфере Пуассона, определяемая условием $\varphi_g(x) \leq h$, состоит из некоторого числа цилиндрических-колец и, быть может, одного или двух дисков. А значит, изоэнергетическая поверхность $Q_{g,h}^3$ гомеоморфна несвязному объединению многообразий $S^1 \times S^2$, а так же, возможно, одной или двух трехмерных сфер или трехмерной проективной плоскости RP^3 .

Утверждение. Число критических точек не превосходит пяти.

Доказательство.

Точка x критическая для φ , если $\varphi'_g(x) = 0$. Приравняем нулю производную правой части (3):

$$\frac{-g^2(A - 1)x}{(1 + (A - 1)x^2)^2} + \left(\frac{cx}{\sqrt{1 + cx^2}} + s \right) = 0. \quad (4)$$

Число нулей у (4) при различных значениях параметров, напомним, что $x \in (-1; 1)$, не превосходит трех. Также у нас всегда есть две критические точки $x = \pm 1$.

Качественные виды функции $\varphi_g(x)$, по которым однозначно строятся графы Рибба, представлен на рисунках 1, 2.

Утверждение. Уравнение бифуркационных кривых

$$h = \left(\frac{cx}{\sqrt{1 + cx^2}} + s \right) \frac{(1 + (A - 1)x^2)^2}{2A(A - 1)x} + \left(\sqrt{1 + cx^2} \pm s \right).$$

Доказательство.

Выразим g как функцию от x , подставим полученные значения в (4), это уравнение задаст кривые на плоскости (g, h) .

$$g^2 = \left(\frac{cx}{\sqrt{1 + cx^2}} + s \right) \frac{(1 + (A - 1)x^2)^2}{(A - 1)x}.$$

После подстановки в (4) получаем искомое уравнение.

Источники и литература

- 1) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999
- 2) Смейл С. Топология и механика УМН, 27:2(164) (1972), 77–133.

Слова благодарности

Хочу выразить глубочайшую благодарность своим научным руководителям Анатолию Тимофеевичу и Александру Владиленивичу за поставленную задачу, многочасовые обсуждения, подбор литературы, проявленное внимание, а также за моральную поддержку.

Иллюстрации

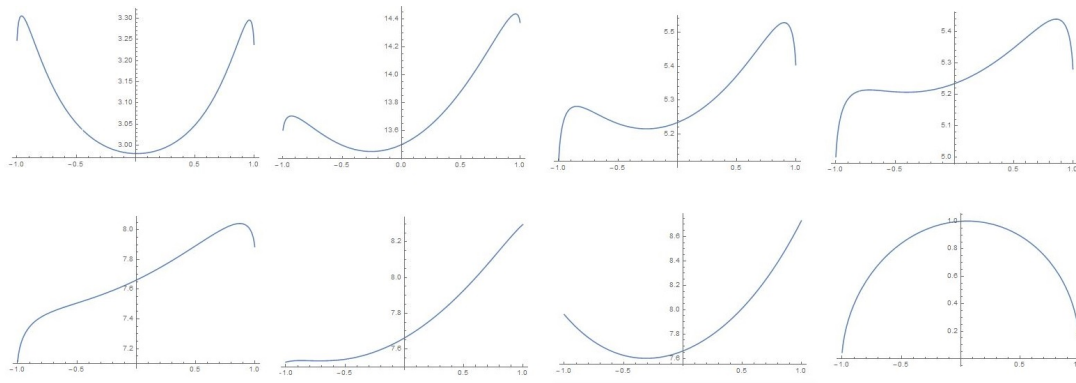


Рис. 1. Различные виды функции $\varphi_g(x)$ при $A < 1$

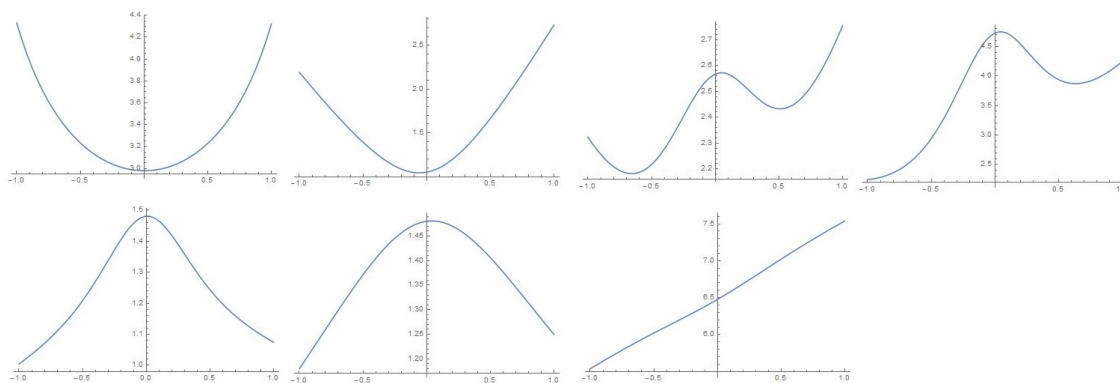


Рис. 2. Различные виды функции $\varphi_g(x)$ при $A > 1$