Модель портфеля с учетом рисков и сожалений

Краснова Мария Михайловна,
Кубышкин Алексей Владимирович
Студентка, студент
Факультет Информатики МГОГИ, Орехово-Зуево, Россия
E-mail: mary.miyako@yandex.ru, plodder.inf@gmail.com

В данной работе формализуется математическая модель портфеля ценных бумаг (активов) как двухкритериальная задача при неопределенности с учетом рисков по Вальду и сожалений по Сэвиджу.

Пусть лицо принимающее решение (ЛПР) имеет n способов распределить денежные средства W_0 по ценным бумагам, выбирая произвольную комбинацию возможных инвестиций. Долю общего количества средств W_0, инвестируемых в i-ый актив обозначим x_i,$i \in \{1,\ldots,n\}$. Вектор $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ будем называть *портфелем инвестиций*.

Далее неопределенности y_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$ являются доходностями i-го актива на единицу вложенных средств. Тогда доходность портфеля равна $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Пусть ЛПР выбирает вектор $x = (x_1,\ldots,x_n)$и, независимо от действий ЛПР, происходит реализация неопределенности $y \in R^n$, причем $y_i \in [a_i,b_i]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$.

$$\text{Обозначим через } X = \left\{ x = (x_1,\ldots,x_n) \middle| x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

множество возможных решений ЛПР, а множество

$$Y = \big\{ y = (y_1,\ldots,y_n) | y_i \in [a_i,b_i], i \in \{1,\ldots,n\} \big\}$$

есть совокупность неопределенностей $y \in R^n$.

Каждую допустимую пару $(x,y) \in X \times Y$ ЛПР оценивает по двум критериями:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \sum\limits_{i} x_i y_i, \\ f_2(x,y) = -\Phi(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $\Phi(x, y) = \max_{x \in X} f_1(x, y) - f_1(x, y)$.

Получаем двухкритериальную задачу при неопределенности

$$P_1 = \langle X, Y, \{f_1(x, y), f_2(x, y)\}\rangle, \tag{2}$$

параметры которой определены выше.

От задачи (2) перейдем к двухкритериальной задаче вида

$$P_2 = \langle X, \{g_1(x), g_2(x)\}\rangle, \tag{3}$$

где

$$g_1(x) = -R_V(x) = -\Big(\max_x \min_y f_1(x, y) - \min_y f_1(x, y)\Big),$$

$$g_2(x) = -R_S(x) = -\Big(\max_y \Phi(x, y) - \min_x \max_y \Phi(x, y)\Big),$$

а множество X допустимых решений x описано в задаче (2).

В задаче (3) ЛПР стремится получить значения обоих критериев $g_i(x)$, $i \in \{1, 2\}$, возможно большими, то есть, он хочет, чтобы риск $R_V(x_*)$ по Вальду и сожаление $R_S(x_*)$ по Сэвиджу для оптимального решения x_* были «как можно меньше».

Далее, задачам (2) и (3) ставится в соответствие классическая оптимизационная задача

$$\begin{cases} x \in X, \\ G(x) \to \min, \end{cases} \tag{4}$$

где $G(x) = R_V^2(x) + R_S^2(x)$.

Оптимальное для задачи (4) решение $x_u \in X$ полагается оптимальным портфелем для задачи (2).

В работе построен алгоритм нахождения оптимального портфеля для формализованной выше задачи и проведен сравнительный анализ данной модели с классическими портфельными моделями нобелевского лауреата Г. Марковица.

Литература

1. Жуковский В. И. Риски в конфликтных ситуациях. М.: ЛЕНАНД/URSS, 2011.
2. Бардин А. Е., Житенева Ю. Н. Риски и сожаления в игре с природой // Труды международной конференции «Крымская осенняя математическая школа - симпозиум 2012». Симферополь, 2012. Т. 22, с. 2–5.