

Минимальные деревья Штейнера для произвольных границ в достаточно малых окрестностях на двумерных римановых многообразиях

Чикин Владимир Максимович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: 4ik-ist@mail.ru

Впервые задача о поиске минимальной сети была поставлена Ферма до 1640 года. А именно, Ферма интересовал ответ на следующий вопрос: как расположить на плоскости точку F так, чтобы сумма расстояний от нее до трех фиксированных точек A , B и C была наименьшей? Общая задача о поиске связной кратчайшей сети, соединяющей данное конечное множество точек плоскости, была поставлена Ярником и Кесслером в 1934. В дальнейшем эта классическая задача получила название проблема Штейнера. Как было показано Ярником и Кесслером[2], каждая кратчайшая сеть, соединяющая множество вершин правильного n -угольника, при $n > 13$ состоит из всех сторон этого n -угольника, за исключением любой одной. Кроме того, Ярник и Кесслер построили очевидные кратчайшие сети для случаев $n = 3, 4$ и 5 . Лишь в 1987 Ду и Хванг завершили описание кратчайших сетей[1], соединяющих вершины правильных многоугольников, доказав, что для $n > 5$ ответ такой же, как и для $n > 13$.

В отличие от евклидова случая, на гладких римановых многообразиях минимальные деревья Штейнера для конкретных границ не известны. В результате исследования удалось определить устройство минимального дерева Штейнера, соединяющего вершины достаточно малой произвольной границы на римановом многообразии. Как следствие, получен результат, описывающий конкретные бинарные топологии, реализующие минимальные деревья Штейнера для вершин достаточно малого правильного многоугольника на многообразии (предварительно вводится определение правильного многоугольника на римановом многообразии). К примеру, в работе показано, что в случае плоскости Лобачевского для каждого $n > 6$ существует достаточно малая окрестность на ней такая, что для любого лежащего в ней правильного n -угольника минимальным деревом Штейнера является граница без любой его стороны.

Источники и литература

- 1) Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. Steiner Minimal Trees for Regular Polygons, Springer Verlag, New York, 1987.
- 2) V. Jarník, O. Kössler (1934), O minimálních grafech obsahujících n daných bodu, Cas, Pěstování Mat. (Essen) T. 63: 223-235.