Секция «Математика и механика»

Эргодическая теорема для одноканальных систем обслуживания с ненадежным прибором, функционирующих в случайной среде

Айбатов Серик Жагалбаевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: capseriktoday@mail.ru

Рассматривается система массового обслуживания с одним ненадежным прибором. Входящий поток $A(t)$ является регенерирующим, с точками регенерации $\{\theta_i\}$, причем $\theta_0 = 0$.
Времена обслуживания требований задаются последовательностью $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, независящих от входящего потока. Положим $B(x) = \mathsf{P}\{\eta_i \le x\}$, $b = \eta_1 < \infty$.
Суммарное время обслуживание требований, поступивших в $[0,t)$, обозначим$X(t) = \sum_{j=1}^{A(t)} \eta_j$. Тогда $X(t)$ также регенерирующий поток с точками регенерации $\{\theta_i\}$. Прибор может выходить из строя, причем его поломки и интервалы между восстановлениями связаны с функционированием случайного процесса $U(t)$, независящего от $A(t)$ и $\{\eta_i\}$. Предполагается, что $U(t)$ — эргодическая цепь Маркова с непрерывным временем с множеством состояний $\mathbb{E} = (0, 1, 2, \dots)$ и инфинитезимальной матрицей $Q = (q_{ij})$.
Теперь опишем, как процесс $U(t)$ влияет на прибор. В момент перехода $U(t)$ в состояние i $(i \in \mathbb{E})$ работающий прибор выходит из строя с вероятностью $\alpha_i \ge 0$, а сломанный прибор восстанавливается с вероятностью $\beta_i \ge 0$. Таким образом, поломки и восстановления прибора возникают только в моменты изменений состояний процесса $U(t)$.

Условие 1 *Мы считаем, что у процесса $U(t)$ найдутся состояния i_0 и i_1, такие что $\alpha_{i_0} > 0$, $\beta_{i_1} > 0$.*

Далее, введем случайную среду для системы — процесс $N(t) = \{e(t), U(t)\}$, где $e(t) = 1$, если в момент t прибор находится в рабочем состоянии, и $e(t) = 0$ в противном случае. Теперь определим процесс $Y(t)$ — количество работы, которое может выполнить система за время $[0,t)$. В нашем случае $Y(t) = \int_0^t e(s)ds$.
Также обозначим $\pi = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(e(t) = 1)$.
Пусть $W(t)$ — остаточное количество работы в момент t, а $\rho = \frac{\lambda b}{\pi}$ — коэффициент загрузки системы.

Теорема 1 *Пусть выполнено условие 1 и $U(t)$ — эргодическая цепь Маркова. Тогда*

- *при $\rho \ge 1$ $\quad W(t) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathsf{P}} \infty$;*
- *при $\rho < 1$ существует $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(W(t) \le x) = F(x)$ и $F(x)$ является функцией распределения.*

Литература

1. Л.Г. Афанасьева. (2005) Системы массового обслуживания с циклическими управляющими процессами. *Кибернетика и системный анализ, том 41, выпуск 1, страницы 54-68*

2. Л.Г. Афанасьева, Е.Е. Баштова. (2013) Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server. *Queueing Systems.*

3. Л.Г. Афанасьева, Е.В. Булинская. (1980) Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. *М:. Издательство МГУ*

4. А.А. Боровков. (1972) Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. *М.: Наука*

5. Gaver (1988) Nonparametric estimation of the probability of a long delay in the M/G/1 queue. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) Vol. 50, No. 3 pp.392-402*

Слова благодарности

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность проф. Афанасьевой Ларисе Григорьевне за постановку задачи и полезное обсуждение.