Секция «Математика и механика»

Явные формулы для частот поперечных колебаний ортотропной прямоугольной пластины Кирхгофа-Лява, шарнирно опёртой с двух противоположных сторон и жёстко закреплённой с остальных двух сторон

Степаненко Иван Игоревич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: mr.stepanenko.ivan@gmail.com

В работе рассматривается задача на собственные значения для уравнения изгиба упругой прямоугольной однородной ортотропной пластины Кирхгофа-Лява. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию с двух противоположных сторон и жёсткой заделке с двух остальных сторон.

Пластины, шарнирно опёртые с двух противоположных сторон, называются пластинами типа Леви и достаточно подробно изучены в литературе. Так, для статических задач получены точные решения при произвольных нагрузках [3, 8], а также найден явный вид для собственных функций и трансцендентное уравнение для собственных частот поперечных колебаний [6, 8]. Существуют также и приближённые методы решения задач на собственные значения, такие как методы Релея-Ритца и его модификации [2, 3, 4, 5, 8, 10], асимптотический метод [1], метод интегральных уравнений [7], метод разложения в ряды по одномерным балочным функциям [9], метод конечных разностей, метод конечных элементов и другие. Подробный обзор работ по колебаниям пластин можно найти в [8].

Несмотря на подробную изученность пластин типа Леви, в настоящее время в литературе отсутствуют явные формулы для частот поперечных колебаний анизотропных пластин, получаемые анализом точного частотного уравнения. Так, например, в работах [4, 5] содержатся конечные формулы для определения частот поперечных колебаний пластин типа Леви, но они получены использованием метода Релея-Ритца, а не анализом точного частотного уравнения. Само частотное уравнение является неявным трансцендентным и может быть решено численно со сколь угодно заданной точностью, но только для конкретно заданной анизотропии пластины. В настоящей работе предложен способ приближённой замены неявного частотного уравнения явным таким образом, что становится возможным получить явные формулы для частот поперечных колебаний пластины.

Задача на собственные значения для поперечных колебаний такой пластины при указанных граничных условиях записывается в виде

$$D_{1111}w_{,xxxx} + 2(D_{1122} + 2D_{1212})w_{,xxyy} + D_{2222}w_{,yyyy} - \rho h\omega^2 w = 0, x \in [0, L], y \in [0, W], \quad (1)$$

$$w|_{y=0,W} = 0; \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0,W} = 0, \quad (2)$$

$$w|_{x=0,L} = 0; \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0,L} = 0, \quad (3)$$

где D_{IJKL} — тензор изгибных жесткостей пластины, L — длина, W — ширина, $w(x,y)$ — прогиб, ρ — плотность, h — толщина, ω — циклическая частота собственных поперечных колебаний. Требуется определить собственные частоты ω и собственные функции $w(x,y)$, удовлетворяющие (1-3).

Будем искать $w(x,y)$ в виде $w_{ij}(x,y) = f_i(x)\sin(\frac{j\pi}{W}y)$. При этом $w_{ij}(x,y)$ автоматически удовлетворяет граничным условиям (2). Введём обозначения:

$$p = \frac{D_{1122}+2D_{1212}}{D_{1111}}, \lambda_j = \frac{\rho h\omega^2}{D_{1111}\left(\frac{j\pi}{W}\right)^4} - \frac{D_{2222}}{D_{1111}}. \tag{4}$$

Безразмерные параметры p и λ_j характеризуют соответственно анизотропию материала и частоту поперечных колебаний по j-й относительно y собственной форме.

Подставляя (4) в (1) и сокращая на $D_{1111}\sin(\frac{j\pi}{W})$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $f_i(x)$:

$$f_i^{''''}(x) - 2p\left(\frac{j\pi}{W}\right)^2 f_i^{''}(x) - \lambda_j\left(\frac{j\pi}{W}\right)^4 f_i(x) = 0, x \in [0,L], \tag{5}$$

$$f_i(0) = f_i(L) = 0; f_i^{'}(0) = f_i^{'}(L) = 0. \tag{6}$$

Вид общего решения уравнения (5) зависит от значения λ_j. При $\lambda_j > 0$ общее решение имеет вид

$$f_i(x) = C_1\,\mathrm{sh}(ax) + C_2\,\mathrm{ch}(ax) + C_3\sin(bx) + C_4\cos(bx), \tag{7}$$

где $a = \frac{j\pi}{W}\sqrt{\sqrt{p^2+\lambda_j}+p}$, $b = \frac{j\pi}{W}\sqrt{\sqrt{p^2+\lambda_j}-p}$.

Подставляя (7) в граничные условия (6), получаем неявное трансцендентное частотное уравнение, связывающее собственные числа с параметром анизотропии p :

$$\frac{1-\cos(\frac{j\pi L}{W}\sqrt{\sqrt{p^2+\lambda_j}-p})\,\mathrm{ch}(\frac{j\pi L}{W}\sqrt{\sqrt{p^2+\lambda_j}+p})}{\sin(\frac{j\pi L}{W}\sqrt{\sqrt{p^2+\lambda_j}-p})\,\mathrm{sh}(\frac{j\pi L}{W}\sqrt{\sqrt{p^2+\lambda_j}+p})} = -\frac{p}{\sqrt{L}}. \tag{8}$$

Частотное уравнение получено также в других работах, например, [8]. При $p = 0$ уравнение совпадает с трансцендентным частотным уравнением для балки, защемлённой с двух сторон.

В работе показано, что с очень хорошей точностью неявное уравнение (8) может быть заменено на явную зависимость λ_j от p, что позволяет получить следующую формулу для частот поперечных колебаний:

$$\omega_{ij}^2 = \frac{\pi^4}{\rho h}\left[D_{1111}\left(\frac{\frac{1}{2}+i}{L}\right)^4 + D_{2222}\left(\frac{j}{W}\right)^4 + 2(D_{1122}+2D_{1212})\frac{i^2j^2}{L^2W^2}\tilde{k}_{ij}(\frac{D_{1122}+2D_{1212}}{D_{1111}})\right],$$

$$\tilde{k}_{ij}(p) = 1 + \frac{1+4i-\frac{4}{\pi}(1+2i)}{4i^2}(p+1)^{-\frac{16j^2L^2}{\pi^2W^2(1+2i)^2\left(1+4i-\frac{4}{\pi}(1+2i)\right)}}. \tag{9}$$

Литература

1. Болотин В. В. Асимптотический метод в теории колебаний упругих пластин и оболочек // Труды конференции по теории пластин и оболочек. К., 1961. С. 21–26.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.-Л., 1947.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., 1966.
4. Biancolini M.E., Brutti C., Reccia L. Approximate solution for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates // J. Sound and Vibr. 2005. No 288, 1–2. pp. 321–344.
5. Hearmon R. F. S. The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic plates with clamped or supported edges // J. Appl. Mech. 1959. No 26. pp. 537-540.
6. Huffington N. J. Jr., Hoppmann W. H. On the transverse vibration of rectangular orthotropic plates // J. Appl. Mech. 1958. No 25. pp. 389-395.
7. Kanazawa T., Kawai T. On the lateral vibration of anisotropic rectangular plates (studied by the integral equation) // Proc. 2d Jap. Natl. Congr. Appl. Mech. 1952. pp. 333-338.
8. Leissa A. W. Vibration of plates. NASA SP-160, 1969.
9. Sundara K. T., Iyengar Raja, Jagadish K. S. Vibration of rectangular orthotropic plates // Applied Scientific Research, Section A. 1964. No 13, 1. pp. 37-42.
10. Szilard R. Theories and applications of plate analysis Classical, numerical and engineering methods. John Wiley Sons, Inc, 2004.

Слова благодарности

Работа выполнена под руководством профессора Победри Б.Е.