Секция «Математика и механика»

Матричные обобщения функции Эйлера

Байгушев Данила Александрович
Школьник
Лицей «Вторая школа», , Москва, Россия
E-mail: IDanila24@gmail.com

В теории чисел хорошо известна функция Эйлера φ. Она ставит в соответствие натуральному числу m количество обратимых элементов из кольца $\mathbb{Z}_m$, т. е. $\varphi(m) := |\mathbb{Z}_m^*|$. У этой функции есть много интересных свойств, поэтому естественно обобщить эту функцию на случай матриц. Для этого рассмотрим вместо вместо $\mathbb{Z}_m$ множество $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{Z}_m)$ матриц 2×2 с элементами из кольца $\mathbb{Z}_m$. Пусть $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_m)$ — множество матриц из $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{Z}_m)$ с определителем 1. Определение. Назовем функцию $\Phi'(m) := |\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_m)|$ матричной функцией Эйлера. Также имеет смысл рассмотреть множество $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_m)$ обратимых матриц из $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{Z}_m)$. Назовем функцию $\Phi(m) := |\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_m)|$ второй матричной функцией Эйлера.

В Таблице 1 представлены первые 40 значений всех трех функций Эйлера.

m	$\Phi'(m)$	$\Phi(m)$	m	$\Phi'(m)$	$\Phi(m)$	m	$\Phi'(m)$	$\Phi(m)$	m	$\Phi'(m)$	$\Phi(m)$
1	0	0	**11**	1320	13200	**21**	8064	96768	**31**	29760	892800
2	6	6	**12**	1152	4608	**22**	7920	79200	**32**	24576	393216
3	24	48	**13**	2184	26208	**23**	12144	267168	**33**	31680	633600
4	48	96	**14**	2016	12096	**24**	9216	73728	**34**	29376	470016
5	120	480	**15**	2880	23040	**25**	15000	300000	**35**	40320	967680
6	144	288	**16**	3072	24576	**26**	13104	157248	**36**	31104	373248
7	336	2016	**17**	4896	78336	**27**	17496	314928	**37**	50616	1822175
8	384	1536	**18**	3888	23328	**28**	16128	193536	**38**	41040	738720
9	648	3888	**19**	6840	123120	**29**	24360	682080	**39**	52416	1257984
10	720	2880	**20**	5760	46080	**30**	17280	138240	**40**	46080	737280

Таблица 1.

Основным результатом данной работы является изучение свойств матричных функций Эйлера и сравнение этих свойств со свойствами обычной функции Эйлера.

Матричные и обычная функции Эйлера во многом похожи, что показывает следующая

Теорема 1. *(см. [1]). Функции Эйлера Φ', Φ и φ обладают следующими свойствами*:

<table>
<tr><td colspan="3">$\Phi(m) = \Phi'(m) \cdot \varphi(m)$</td></tr>
<tr><td>φ</td><td>Φ'</td><td>Φ</td></tr>
<tr><td colspan="3">Мультипликативность: если НОД $(a, b) = 1$, то</td></tr>
<tr><td>$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$</td><td>$\Phi'(ab) = \Phi'(a) \cdot \Phi'(b)$</td><td>$\Phi'(ab) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Теорема Эйлера:
для любого A из соответствующего множества $\mathbb{Z}_m^*$, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_m)$ или $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_m)$</td></tr>
<tr><td>$A^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$</td><td>$A^{\Phi'(m)} \equiv E \bmod m$</td><td>$A^{\Phi(m)} \equiv E \bmod m$</td></tr>
</table>

Также интересным является вопрос о росте матричной функции Эйлера. Для его изучения нам понадобиться следующее определение.

Определение. Будем говорить, что функция f *растет в среднем* так же, как функция g (обозначим $f \mathrel{\widehat{\approx}} g$), если

$$\frac{f(1)+\ldots+f(m)}{g(1)+\ldots+g(m)} \to 1 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Хорошо известно, что $\varphi(m) \mathrel{\widehat{\approx}} \frac{m}{\zeta(2)}$, где ζ — дзета-функция Римана. Рост матричных функций Эйлера изучен в следующей теореме.

Теорема 2. *(см. [2]). Имеют место следующие асимптотики:* $\Phi'(m) \mathrel{\widehat{\approx}} \frac{m^3}{\zeta(3)}$ и $\Phi(m) \mathrel{\widehat{\approx}} m^4 \cdot \prod\limits_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4}\right)$.

Замечание. $\prod\limits_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4}\right) = \frac{c}{\zeta(2)\cdot\zeta(3)}$, где $c = \prod\limits_p (1 - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4})$ примерно равна 0,535896.

В [3] В.И Арнольд ставит вопрос о связи роста в среднем произведения двух функций и произведения ростов в среднем самих этих функций. В рассмотренных им и А.А. Карацубой примерах произведение средних оказывалось во много раз больше среднего произведения.

В случае трех функций Эйлера имеет место асимптотика $\Phi(m) \mathrel{\widehat{\approx}} c \cdot \varphi(m)\Phi'(m)$, т.е. произведение средних отличается от среднего произведения на константу, очень близкую к 1. По всей видимости, это первый «нетривиальный» пример подобной ситуации. С точки зрения роста матричных функций Эйлера это означает, что « скачки » (т.е. большие изменения значений при малых изменениях аргумента) этих функций приходятся примерно на одни и те же значения аргументов (хотя амплитуды этих «скачков» сильно отличаются друг от друга). Возникает естественный вопрос: что будет, если рассматривать матрицы большего размера?

Определение. *Назовем функцию* $\Phi'_n(m) := |\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}_m)|$ *n-мерной матричной функцией Эйлера.*

Теорема 3. *Имеет место следующая асимптотика*:

$$\Phi'_n(m) \mathrel{\widehat{\approx}} m^{n^2-1} \cdot \prod_p \left(\frac{1}{p} \cdot \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^{n-1} + 1 - \frac{1}{p}\right).$$

Литература

1. Д. А. Байгушев, «О матричной функции Эйлера» — Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского, т. 45, с. 12-14, 2012.

2. Д. А. Байгушев, «О росте в среднем матричной функции Эйлера» — Сборник тезисов Международной математической конференции «Геометрия. Инварианты. Управление», с. 31, 2013.

3. В.И. Арнольд. Задачи семинара 2003 – 2004. М., МЦНМО, 2005 г.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю, П. В. Бибикову, за помощь и внимание к работе.