Секция «Математика и механика»

Минимальные деревья Штейнера в пространстве компактов с метрикой Хаусдорфа

Тропин Александр Михайлович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: am-tropin@yandex.ru

Хорошо известна задача нахождения минимального дерева Штейнера в евклидовой метрике на плоскости. Даны n фиксированных точек на плоскости, называющихся граничными. Требуется построить связный граф с вершинами в граничных и, если необходимо, дополнительных точках такой, что сумма длин его ребер минимальна (длиной ребра называется расстояние между двумя инцидентными ребру вершинами в евклидовой метрике)[1]. Естественное обобщение этой задачи можно получить, рассматривая пространство конечных компактов, наделенное метрикой Хаусдорфа[2].

Рассматриваем метрическое пространство $(\mathcal{X}, \rho)$ с евклидовой метрикой. Для компакта A определим окрестность радиуса d: $U_d(A) := \{x \in \mathcal{X} : \rho(x, A) \leq d\}$, где $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Для двух компактов A и B определим расстрояние Хаусдорфа между ними: $d_H(A, B) := \inf\{d : U_d(A) \supset B, U_d(B) \supset A\}$, что эквивалентно $d_H = \max\{d_A, d_B\}$, где $d_A := \inf\{d : U_d(A) \supset B\}$, $d_B := \inf\{d : U_d(B) \supset A\}$. Расстояние Хаусдорфа является метрикой на пространстве компактов $\mathcal{H}(\mathcal{X})$.

Рассмотрим n фиксированных компактов $A_i \in \mathcal{H}, i = 1, ..., n$. Множество $\mathcal{A} := \{A_1, ..., A_n\}$ будем называть границей, A_i — граничными компактами.

Рассмотрим m произвольных компактов $K_j \in \mathcal{H}, j = 1, ..., m$. Множество $\{K_1, ..., K_m\}$ назовем множеством внутренних компактов и обозначим через $\mathcal{K}$.

Рассмотрим связный граф $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{K}, E)$, в котором компакты из множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ являются вершинами. Длиной ребра $e \in E$ называется расстояние Хаусдорфа между инцидентными ему вершинами.

Обозначим
$$d_H(G) = \sum_{vw \in E} d_H(v, w).$$
Минимальным расстоянием Штейнера для фиксированной границы $\mathcal{A}$ назовем величину
$$(\mathcal{A}) := \inf_{\mathcal{K}, G} d_H(G),$$
где инфимум берется по всевозможным расположениям компактов из множества $\mathcal{K}$ и бинарным деревьям G с множеством вершин $\mathcal{A} \cup \mathcal{K}$, у которых $\mathcal{A}$ — множество всех листьев (вершин степени 1), а $\mathcal{K}$ — множество всех вершин степени 3.

Минимальным деревом Штейнера для фиксированной границы $\mathcal{A}$ назовем связный граф $G' = (\mathcal{A} \cup \mathcal{K}', E')$ такой, что
$$d_H(G') = (\mathcal{A}).$$
Компактами Штейнера для фиксированной границы $\mathcal{A}$ назовем компакты из такого множества K', что $G' = (\mathcal{A} \cup \mathcal{K}', E')$ является минимальным деревом Штейнера.

Таким образом, ставится следующая общая задача: изучение минимальных деревьев Штейнера для произвольного множества компактов.

Определим функцию $\nu : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$, которая точке пространства $\mathcal{X}$ сопоставляет одноточечный компакт из пространства $\mathcal{H}$: $\nu(x) = \{x\}$.

Теорема 1 . *Пусть* $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{K}, E)$ *— дерево в* $(\mathcal{H}, d_H)$, $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, ..., \{a_n\}\big\}$ *— граница* G, *где* $\{a_i\} \in \mathcal{H}, i = 1, ..., n$, $\mathcal{K} = \{K_1, ..., K_m\}$ *— внутренние вершины* G, $K_1, ..., K_m \in \mathcal{H}$. *Тогда существуют* $k_i \in K_i, i = 1, ..., m$, *такие, что* $\rho(\nu^{-1}(\overline{G})) = d_H(\overline{G}) \le d_H(G)$, *где* $\overline{G} = \Big(\mathcal{A} \cup \big\{\{k_1\}, ..., \{k_m\}\big\}, E'\Big)$.

Литература

1. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Minimal Networks. The Steiner Problems and Its Generalizations. N.W., Boca Raton, Florida, CRC Press (1994)

2. Schlicker Steven. The Geometry of the Hausdorff Metric. Grand Valley State University, Allendale, MI (2008)