Секция «Математика и механика»

Гамильтоновы системы на многообразиях Бертрана

Федосеев Денис Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: docxaos@mail.ru

Задачей Бертрана называется следующая обратная задача динамики: найти все потенциалы, обеспечивающие замкнутость определенного класса траекторий движения точки по многообразию вращения в потенциальном поле.

Конфигурационные многообразия этой задачи (иными словами, многообразия вращения, допускающие существование хотя бы одного искомого потенциала) называются *многообразиями Бертрана.*

Описанная задача восходит к работам самого Бертрана [1], Дарбу [2]. Недавно многообразия Бертрана без экваторов были полностью описаны [3], а именно, доказана следующая теорема:

Теорема 1 *Многообразие* $(a,b)\times S^1$ *с метрикой* $ds^2=dr^2+f^2(r)d\varphi^2$ *в полярных координатах* $(r,\varphi \mod 2\pi)$*, где* $f'(r)\neq 0$ *на* (a,b)*, является многообразием Бертрана (для классов замыкающих, локально, полулокально, сильно и слабо замыкающих потенциалов), если и только если существует тройка параметров* (μ,c,t)*,* $\mu\in\mathbb{Q}_{>0}, c\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}$ *и координаты* $(\theta=\theta(r),\varphi \mod 2\pi)$*, где* $\frac{d\theta}{dr}=\frac{1}{\mu^2}\frac{1}{f^2(r)}$*, в которых метрика принимает вид* $ds^2=(\theta^2+c-t\theta^{-2})^{-2}d\theta^2+\mu^{-2}(\theta^2+c-t\theta^{-2})^{-1}d\varphi^2$*.*

Таким образом, многообразия Бертрана без экваторов образуют двухпараметрическое семейство с параметрами $(c,t)\in\mathbb{R}^2$. В работе [3] дано полное геометрическое описание многообразий Бертрана этого семейства в зависимости от принадлежности пары параметров (c,t) некоторым вполне определенным областям.

В частности, многообразия, соответствующие прямой $t=0$ являются многообразиями постоянной кривизны (сферой, плоскостью, плоскостью Лобачевского или рациональным накрытием над одним из этих многообразий). Для таких многообразий существует в точности два бертрановских потенциала, для многообразий, отввечающих параметрам $(c,t\neq 0)$, бертрановский потенциал существует ровно один.

Многообразия Бертрана являются многообразиями вращения, но далеко не все они могут быть реализованы как поверхности вращения, вложенные в $\mathbb{R}^3$. Более того, не все многообразия Бертрана могут быть даже локально реализованы указанным образом. В частности, имеет место следующая теорема [4]:

Теорема 2 *Верны следующие утверждения о реализуемости римановых многообразий Бертрана* $(I_{k,c,t}\times S^1, \mathrm{ds}^2_{\mu,c,t})$ *целиком:*
1) *Дополнительное многообразие не реализуемо никогда;*
2) *Основное многообразие реализуемо тогда и только тогда, когда соответствующая тройка параметров* (μ,c,t) *принадлежит следующим областям:* $\{\mu\geq 2, c\geq -2\sqrt{-t}, t\leq 0\}\cup\{1\leq\mu<2, c\geq -2\sqrt{-t}\sqrt{h(\mu)}, t\leq 0\}$*, где* $h\in \mathrm{Homeo}^+((0,+\infty),\mathbb{R})$ *— сохраняющий ориентацию гомеоморфизм интервалов, определенный формулой* $h(\mu):=\frac{(\mu^2-1)(8+\mu^2)^2}{27\mu^4}$*.*

Динамическая система на многообразии Бертрана, заданная центральным бертрановским потенциалом $V(r)$, является гамильтоновой системой относительно естественного гамильтониана

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r).$$

Она является интегрируемой с дополнительным интегралом p_φ, а потому к ней может быть применен стандартный анализ интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем. В частности, могут быть вычислены меченые молекулы Фоменко-Цишанга (см., например, [5]).

Следует отметить, однако, что некоторые динамические системы на многообразиях Бертрана предоставляют простой и наглядный пример интегрируемых гамильтоновых систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля, для которых классификационная теория развита пока слабо.

Многообразия Бертрана с экваторами на данный момент остаются малоизученными. Тем не менее, некоторые факты про них уже можно утверждать. В частности, доказано, что в случае гладких многообразий и потенциалов, не существует иных многообразий Бертрана для класса локально замыкающих потенциалов, кроме описанных в теореме 1. Изучены некоторые свойства бифуркационных диаграмм для естественных гамильтоновых систем на многообразиях Бертрана с экваторами. В частности, доказано, что на бифуркационной диаграмме всегда имеется парабола, отвечающая особому экватору. Установлено, что всякий экватор многообразия Бертрана особ, а особых экваторов может быть не более одного. Отсюда непосредственно следует утверждение:

Лемма 1 *Цилиндр не является вполне Бертрановским многообразием ни для какого центрального потенциала.*

Литература

1. J. Bertran. C. R. Acad. Sci. Paris, 1873, V.77.

2. G. Darboux. Sur un probléme de mécanique. // T. Despeyrous, Cours de mécanique, Vol. 2, Note XIV. // A. Herman, Paris, 1886, pp. 461–466.

3. О.А. Загрядский, Е.А. Кудрявцева, Д.А. Федосеев. Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения. // Матем. Сб. 203:8 (2012), с.39-78.

4. О.А. Загрядский, Д.А. Федосеев. О глобальной и локальной реализуемости римановых многообразий Бертрана в виде поверхностей вращения. // Вестник МГУ (в печати).

5. А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2. // Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.

Слова благодарности

Докладчик благодарен О.А. Загрядскому, Е.А. Кудрявцевой и А.Т. Фоменко за плодотворные обсуждения задачи.