Секция «Математика и механика»

Меченые молекулы некоторых интегрируемых систем на поверхностях вращения.

Кантонистова Елена Олеговна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: kysin@rambler.ru

Дадим определение интегрируемой гамильтоновой системы на поверхности вращения в потенциальном поле.

Пусть дано многообразие S, диффеоморфное $(a,b)\times S^1$ (числа a и b – конечны), с метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$ в полярных координатах $(r, \varphi(mod 2\pi))$. Функции $V(r),\ f(r)$ – гладкие функции на отрезке (a,b), причем $f(r) > 0$ при $r \in (a,b)$. Функция $V(r)$ называется потенциалом, $f(r)$ – функцией вращения. Система, заданная с помощью пары функций $(f(r), V(r))$ является интегрируемой гамильтоновой системой на многообразии S. Назовем ее *системой на поверхности вращения.*

Её фазовое пространство четырехмерно (координаты $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$).

Она имеет два первых интеграла: H – энергия, p_φ – проекция момента импульса на ось вращения.

Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r). \tag{1}$$

Определение. Отображение $\Phi:\ S \to \mathbb{R}^2:$
$(r, \varphi, p_r, p_\varphi) \mapsto (H(r, \varphi, p_r, p_\varphi), p_\varphi(r, \varphi, p_r, p_\varphi))$ называется *отображением момента.*

Определение. Если $rkd\Phi(x) < 2$, то x – *особая точка отображения момента*, а $\Phi(x)$ – *особое значение отображения момента.* Множество особых значений $\Sigma = \{\xi = \Phi(x),\ x$ – особая точка$\}$ – *бифуркационная диаграмма.*

Пусть теперь построена бифуркационная диаграмма, т.е. мы имеем набор кривых на плоскости с координатами (H, p_φ). Фиксируем произвольное значение $H = H_0$, принадлежащее образу отображения момента. Тогда прообраз множества точек этого образа является трехмерным многообразием Q^3 – *изоэнергетическим многообразием*, причем любой точке (H_0, p_φ) диаграммы, не лежащей на бифуркационной кривой, отвечает один (или несколько) торов лиувилля, а точкам $(H_0, p_{\varphi 0})$ лежащим на особых кривых, отвечают некоторые перестройки торов. Перестройка определенного типа называется *атомом.*

Вывод: зная типы перестроек торов (т.е. атомы), происходящих в прообразах точек бифуркационных кривых, по бифуркационной диаграмме можно построить молекулу системы для каждого значения энергии H. *Молекула* – это граф, вершины которого отвечают перестройкам торов, а ребра отвечают регулярным значениям отображения момента.

Следующим этапом исследования системы является подсчет *меток* – некоторых инвариантов интегрируемой системы – на ребрах молекулы. Молекула с метками на ребрах называется *меченой молекулой*. Меченая молекула является полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности, а именно:

Теорема [1]. *Две интегрируемые системы на изоинергетических поверхностях Q и Q', заданные гамильтоновыми векторными полями v и v' соответственно, лиувиллево эквивалентны в том и только в том случае, когда их меченые молекулы W^* и $W^{*\prime}$ совпадают.*

В докладе будет рассказано о методе вычисления инварианта Фоменко-Цишанга с использованием функции вращения.