definition

Секция «Математика и механика»

О связи разрешающих полугрупп и эквивалентных им по Чернову семейств операторов для уравнений теплопроводности и Шрёдингера в пространстве L2

Ремизов Иван Дмитриевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: ivremizov@yandex.ru

Предлагается метод построения представления разрешающей полугруппы для уравнения Шрёдингера в виде формулы Фейнмана для случая, когда такое представление известно для уравнения теплопроводности и состоит из самосопряжённых операторов.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство функций. Пусть $\mathcal{D}$ — его достаточно большое бесконечномерное подпространство. Пусть $\overline{\mathcal{D}}$ — замыкание $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}$ — то пространство, в котором ищутся решения уравнений. Пусть $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка, и уравнение теплопроводности записывается в виде $u'_t = Lu$, а уравнение Шрёдингера в виде $u'_t = iLu$.

Пусть семейство линейных непрерывных операторов $S_t\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ удовлетворяет

1. $S_t(\overline{\mathcal{D}}) \subseteq \overline{\mathcal{D}}$;
2. $S_0 = id$;
3. $\frac{d}{dt}(S_t u)|_{t=0} = Lu$ для каждой $u \in \mathcal{D}$;
4. $\|(S_t - id)^2 u\| = O(t^2)$ для каждой $u \in \mathcal{D}$;
5. $\|S_t\| \leq 1$ при всех $t \geq 0$;
6. S_t - самосопряженный оператор при каждом $t \geq 0$;
7. Оператор $(L, \mathcal{D})$ допускает замыкание в $\mathcal{H}$ и является генератором сильно непрерывной полугруппы.

Тогда оператор $G_t = \exp[i(S_t - id)]$ удовлетворяет

1'. $G_t(\overline{\mathcal{D}}) \subseteq \overline{\mathcal{D}}$;
2'. $G_0 = id$;
3'. $\frac{d}{dt} G_t|_{t=0} = iL$ на $\mathcal{D}$;
4'. $\|G_t\| \leq 1$ при всех $t \geq 0$.

При этом 1' следует из 1, 2' из 2, 3' из 3-5, а 4' – из 5-6. К семейству G_t для построения формул Фейнмана можно применять теорему Чернова, если дополнительно потребовать, что

5'. Оператор $(iL, \mathcal{D})$ допускает замыкание в $\mathcal{H}$ и является генератором сильно непрерывной полугруппы.

Если операторы S_t не самосопряжённые, то можно попробовать провести подобную процедуру с операторами $(S_t + S_t^*)/2$ или $S_t S_t^*$, которые уже будут самосопряжёнными.

Литература

O.G. Smolyanov. Feynman formulae for evolutionary equations. — Trends in Stochastic Analysis, London Mathematical Society Lecture Notes Series 353, 2009.

I.D. Remizov. Solution of a Cauchy problem for a diffusion equation in a Hilbert space by a Feynman formula// Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, v.19, No 3, 360-372.