О резольвенте возмущённого оператора

Головина Анастасия Михайловна

кандидат физико-математических наук

Учебно-научный комплекс фундаментальные науки МГТУ имени Н. Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: nastya_gm@mail.ru

Пусть Γ – произвольная периодическая решётка в $\mathbb{R}^d$ размерности d. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{H}_0 := (-1)^m \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbf{Z}^d_+\\ |\beta|=|\gamma|=m}} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\mathrm{a}_{\beta\gamma}\frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} + \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}^d_+\\ |\beta|\leqslant 2m-1}} \mathrm{b}_\beta\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$$

с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d)$, где $m\in\mathbb{N}$, $\mathrm{a}_{\beta\gamma}\in C^m(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{b}_\beta\in C^{2m-1}(\mathbb{R}^d)$ – матричнозначные периодические относительно решетки Γ. Предполагаем, что оператор $\mathcal{H}_0$ эллиптичен:

$$\nu|\theta|^{2m} \leqslant \Big|\det \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbf{Z}^d_+\\ |\beta|=|\gamma|=m}} \mathrm{a}_{\beta\gamma}(x)\theta^{\beta+\gamma}\Big|, \quad \theta=(\theta_1,...,\theta_d)\in\mathbb{R}^d,$$

где ν – некоторая положительная константа.

Введём в рассмотрение функции $\varsigma_i(r)$, $\eta_i(r)\in C^{2m}(R_+)$, $i=1,\ldots,k$, $\varsigma_i(r)\geqslant 0$, $\eta_i(r)\geqslant 0$, удовлетворяющие условиям:

1. Существует функция $a\in C^{2m-1}[0,+\infty)$ такая, что верны оценки: $|\varsigma_i(r)|\leqslant C\mathrm{e}^{-\int\limits_0^r a(t)dt}$, $i=1,\ldots,k$, C – некоторая константа.
2. Функция $a(r)$ обращается в нуль в некоторой окрестности нуля, и вместе со всеми своими производными до порядка $(2m-1)$ ограничена равномерно в $\mathbb{R}^d$ и $\int\limits_0^{+\infty} a(t)dt=+\infty$.
3. Функции η_i вместе со всеми своими производными до порядка $2m$ стремятся к нулю на бесконечности.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим семейство произвольных ограниченных операторов $\mathcal{L}_i^0$, $i=1,...,k$, с областями определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d)$. Обозначим через $\mathcal{L}_i$, $i=1,...,k$, операторы в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d)$, действующие по правилу $(\mathcal{L}_iu)(x):=\varsigma_i(|x|)(\mathcal{L}_i^0\eta_i(|\cdot|)u)(x)$.

В работе рассматриваются разбегающиеся возмущения вида $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$. Здесь $X_i \in \Gamma$ – дискретные параметры, $\mathcal{S}(\cdot)$ – оператор сдвига, действующий следующим образом: $(\mathcal{S}(Y)u)(x) := u(x+Y), \quad Y \in \Gamma$. Через $\sigma(\cdot)$ обозначим спектр оператора, а через X – вектор вида $X = (X_1, \dots, X_k)$ и положим $\tau(X) := \min\limits_{i \neq j} |X_i - X_j|$. Предполагаем, что $\tau(X) \to +\infty$. Ясно, что любые две различные точки X_i переводятся друг в друга с помощью конечного числа сдвигов вдоль решётки Γ.

Основной результат работы сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть множество* $K := \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k} \sigma(\mathcal{H}_i)$ *непусто. Тогда для достаточно больших* $\tau(X)$ *оператор* $\mathcal{H}_X$ *замкнут. Для любого* $\lambda \in K$ *и достаточно больших* $\tau(X)$ *верно представление*

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} := & \Big[\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i) \\
& - (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \Big] (\mathrm{I} + \mathcal{P}_X)^{-1}, \\
\mathcal{P}_X := & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i) \Big[\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j) \\
& - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \Big],
\end{aligned}
$$

где $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \to 0$ *при* $\tau(X) \to +\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-97009 р_ поволжье_а и Фонда поддержки молодых учёных "Конкурс Мёбиуса".

Литература

1. Головина А. М. Резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями // Математические заметки. 2012. Т. 91, № 3. С. 464–466.

2. Golovina A. On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space // Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, V. 19, No. 2, P. 182-192.