Секция «Математика и механика»

Оценка качества робастной устойчивости одномерной колебательной системы третьего порядка

Зуева Ирина Олеговна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: iozueva@gmail.com

Рассмотрим одномерную колебательную систему третьего порядка с постоянно действующим возмущением:

$$\dddot{x} + a_1\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_3x = u(t). \tag{1}$$

Возмущение $u(t)$ является элементом пространства L_∞ и ограничено по норме

$$||u(t)||_\infty = sup\sqrt{u(t)^T u(t)} \leq \delta.$$

Система (1) в отсутствии возмущения является асимптотически устойчивой, т.е. ее собственные числа равны

$$\lambda_1 = -a, \lambda_2 = -b + ic, \lambda_3 = -b - ic, a, b, c > 0.$$

В данной работе ставится задача оценки качества робастной устойчивости системы (1). Иными словами, требуется построить оценку области достижимости этой системы.

Для систем представленного вида имеется результат, описанный в [1]: в фазовом пространстве область достижимости системы можно аппроксимировать эллипсоидом, но не показано, есть ли траектории системы, выходящие на этот эллипсоид, т.е. касается ли эллипсоид области достижимости.

В нашей работе построена цилиндрическая оценка робастной устойчивости. Более того, область достижимости заключена в цилиндр, на боковую поверхность которого выходят траектории системы. Чтобы показать это, введем замену переменных (как это сделано в [2]):

$$y_0 = x, y_1 = ax + \dot{x}, y_2 = a\dot{x} + \ddot{x}.$$

При такой замене система (1) распадается на две подсистемы, связанные по координатам, но не связанные по возмущению:

$$\begin{aligned} \dot{y_0} &= -ay_0 + y_1, \\ \dot{y_1} &= y_2, \\ \dot{y_2} &= -(b^2 + c^2)y_1 - 2by_2 + u(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Подсистема (y_1, y_2) системы (2) замкнута и представляет собой систему второго порядка, область достижимости которой является внутренность эллипса

$$\left(\frac{y_1}{u}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{v}\right)^2 \leq 1,$$

где $u = \frac{\delta(1+e^{-\frac{b\pi}{c}}+e^{-\frac{2b\pi}{c}})}{b(1-e^{-\frac{2b\pi}{c}})}$, $v = \frac{\delta}{2b}$.

Как показано в [3], существует возмущение, реализующее предельный цикл на границе области достижимости. Первое уравнение системы (2) дает оценку координаты y_0:

$$|y_0| \leq \frac{max\ y_1}{a} = \frac{u}{a}.$$

Таким образом, в фазовом пространстве (y_0, y_1, y_2) область достижимости аппроксимируется цилиндром

$$\left(\frac{y_1}{u}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{v}\right)^2 = 1,$$
$$-\frac{u}{a} \leq y_0 \leq \frac{u}{a},$$

который этой области касается.

Литература

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука, 2002.

2. Александров В.В., Зуева И.О., Сидоренко Г.Ю. Робастная устойчивость управляемых систем третьего порядка // Вестник моск. ун-та, Матем. Механ. (принята в печать, 2013).

3. Александров В.В., Александрова О.В., Приходько И.П., Темолтзи-Ауила Р. О синтезе автоколебаний // Вестн. моск. ун-та. Матем. Механ. 2007. №3. 41-43.