Секция «Математика и механика»

О числе стационарных точек преобразования Мёбиуса в трехзначной логике

Мазуров Анатолий Алексеевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: anat-mazurov@mail.ru

Пусть k – натуральное число, $k \geqslant 2$. Множество всех натуральных чисел от 0 до $k-1$ обозначается через E_k: $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$. Функцией k-значной логики от n переменных называется отображение $f: E_k^n \to E_k$. Множество всех функций k-значной логики от n переменных обозначается $P_k(n)$. Множество всех функций k-значной логики (от любого количества переменных) обозначается P_k. Вектором значений функции f, зависящей от переменных $x_1, \ldots, x_n$, называется последовательность значений функции на всех наборах от $(0, \ldots, 0)$ до $(k-1, \ldots, k-1)$ в лексикографическом порядке, т. е. на наборах, обозначающих числа от 0 до $k^n - 1$ в k-ичной системе счисления в порядке возрастания. Полиномом в k-значной логике называется формула вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\tilde{\alpha} \in E_k^n} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \pmod{k},$$

где $x^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\alpha}, & \alpha \neq 0, \end{cases}$ $c_\alpha \in E_k$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Числа c_α называются коэффициентами полинома. Преобразование Мебиуса, обозначаемое в дальнейшем μ - это преобразование, строящее по вектору значений функции из P_k вектор коэффициентов ее полинома. В данном докладе будет рассмотрен вопрос нахождения мощности множества функций трехзначной логики, которые не изменяются под действием этого преобразования. Мощности множеств функций из $P_3(n)$, стационарных относительно какой-то степени преобразования Мебиуса, являются степенями тройки, поэтому удобно ввести следующие обозначения:

$$Q_1(n) = \{f \in P_3(n) \mid \mu(f) = f\}, \quad q_1(n) = \log_3 |Q_1(n)|,$$

$$Q_2(n) = \{f \in P_3(n) \mid \mu(f) = 2f\}, \quad q_2(n) = \log_3 |Q_2(n)|,$$

$$R_1(n) = \{f \in P_3(n) \mid \mu^2(f) + \mu(f) = f\}, \quad r_1(n) = \log_3 |R_1(n)|,$$

$$Q_1^2(n) = \{f \in P_3(n) \mid \mu^2(f) = f\}, \quad Q_2^2(n) = \{f \in P_3(n) \mid \mu^2(f) = 2f\},$$

$$q_{21}(n) = \log_3 |Q_1^2(n)| = \frac{1}{4}(3^n + (-1)^n + 2), \quad q_{22}(n) = \log_3 |Q_2^2(n)| = \frac{1}{4}(3^n + (-1)^n - 2).$$

Последние равенства следуют из полученных ранее результатов [1,2]. Кроме того, из тех же результатов следуют соотношения

$$q_1(n) + q_2(n) = q_{21}(n),$$
$$q_1(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} r_1(i),$$
$$r_1(n) = \sum_{i=0}^{n-1}(q_{22}(i) + 2q_2(i)).$$

Для логарифма мощности множества стационарных функций верно:

$$q_1(n) = \frac{1}{8}(3^n + 2 + (-1)^n) + h(n), \quad q_2(n) = \frac{1}{8}(3^n + 2 + (-1)^n) - h(n),$$

где $h(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$h(n) = \frac{1}{2} - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} h(j), \quad h(0) = h(1) = \frac{1}{2}.$$

Пусть $h(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$h(n) = \frac{1}{2} - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} h(j), \quad h(0) = h(1) = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$h(n) = \frac{1}{2}(3^{n/2}\cos(n\arccos(1/\sqrt{3})))$$

Рассмотрим разность двух последовательных значений $h(n)$:

$$h(n) - h(n-1) = -2\sum_{i=1}^{n-2} h(j), \quad h(n) - 3h(n-1) = -2\sum_{i=1}^{n-1} h(j),$$

откуда заменой во втором выражении n на $n-1$ получаем

$$h(n) - h(n-1) = h(n-1) - 3h(n-2),$$
$$h(n) = 2h(n-1) - 3h(n-2). \tag{1}$$

Решение уравнения **??** имеет вид

$$h(n) = \frac{1}{4}([1 - i\sqrt{2}]^n + [1 + i\sqrt{2}]^n) = \frac{1}{2}Re(1 + i\sqrt{2})^n,$$

где i — мнимая единица ([3,4]).

$$Re(1 + i\sqrt{2})^n = (\sqrt{3})^n \times Re[e^{n*i\arccos(1/\sqrt{3})}] = 3^{n/2} * \cos(n\arccos(1/\sqrt{3})),$$

откуда получаем утверждение теоремы. Таким образом получаем, что мощность множества стационарных точек преобразования Мебиуса равна

$$3^{\frac{1}{8}(3^n+2+(-1)^n+4*3^{n/2}\cos(n\arccos(1/\sqrt{3})))}.$$

Литература

1. Мазуров А.А. О стационарных классах функций трехзначной логики // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика. Т. 2. 2012. С. 37-43.

2. Мазуров А.А. Структура стационарных классов функций трехзначной логики // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2013. В печати.

3. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. // Сер. Популярные лекции по математике. Л.; М., Гос. Издательство Технико-Теоретической Литературы, 1949-1990. Т.1.

4. Энциклопедия целочисленных последовательностей: http://oeis.org/A087455