

Секция «Математика и механика»

Диссипативная разностная схема для расчета вязкоупругих волн в среде
Кельвина-Фойхта

Красненко Алевтина Николаевна

Аспирант

Сибирский федеральный университет, Институт математики, Красноярск, Россия

E-mail: krasnenko_alya@mail.ru

На основе метода Иванова построения разностных схем с контролируемой искусственной диссипацией энергии разработан экономичный вычислительный алгоритм для анализа динамических процессов, вызванных импульсными воздействиями в вязкоупругой среде Кельвина-Фойхта.

Математическая модель Кельвина-Фойхта является одной из основных моделей механики вязкоупругих сред. Она служит для описания гелей – материалов, имеющих упругий скелет, поры которого заполнены вязкой жидкостью. В рамках этой модели система уравнений одномерных движений с плоскими продольными волнами малой амплитуды в безразмерных переменных принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \sigma = s + \eta \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

где v – массовая скорость, η – безразмерный параметр, характеризующий вязкость, σ и s – полное напряжение и его упругая составляющая.

Система уравнений (1) не является гиперболической, поэтому вопрос о выборе надежных численных методов нетривиален. Так простейшая разностная схема типа Неймана-Рихтмайера второго порядка аппроксимации на сдвинутых сетках дает паразитные осцилляции численного решения, что вызвано свойством немонотонности.

Конструктивный метод построения диссипативных разностных схем для решения основных краевых задач линейной динамической теории упругости был предложен Ивановым [1]. Этот метод оказался эффективным применительно к данной задаче. Суть метода заключается в рассмотрении расширенной системы уравнений, получаемой путем введения вспомогательных неизвестных функций v' и σ' , аппроксимирующих искомое решение, но не равных, вообще говоря, v и σ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma'}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \sigma = s + \eta \frac{\partial v'}{\partial x}. \quad (2)$$

Систему (2) замыкают уравнения, связывающие вспомогательные функций с основным решением:

$$\begin{pmatrix} v - v' \\ \sigma - \sigma' \end{pmatrix} = -D \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \sigma' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица D , характеризующая дополнительную диссипацию энергии, должна быть неотрицательно определенной. Кроме того, коэффициенты этой матрицы должны быть малыми из соображения аппроксимации системой (2) исходной системы (1).

При построении разностной схемы проведенные рассуждения повторяются на дискретном уровне. Пусть τ и h – шаги равномерной сетки по времени и по пространственной переменной соответственно. Дискретный аналог (2) записывается в виде системы

разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{v^j - v_j}{\tau} &= \frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{h}, & \frac{s^j - s_j}{\tau} &= \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h}, \\ \sigma_j &= \frac{s^j + s_j}{2} + \eta \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h}, \end{aligned} \quad (3)$$

в которой величины с целым индексом $j = 1, \dots, n$, аппроксимирующие основные функции, относятся к нижней и верхней граням пространственно-временной ячейки сетки, а величины с полуцелыми индексами, аппроксимирующие вспомогательные функции, относятся к ее боковым граням. Матрица D , входящая в замыкающие уравнения, берется в специальной форме:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha h & 0 \\ 0 & \beta h \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \beta = 0.5(1 - \tau/h)$. При таком выборе матрицы схема решения системы уравнений для упругой среды с $\eta = 0$ в точности совпадает со схемой распада разрыва Годунова.

Замыкающие уравнения с учетом выбранных α и β принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{v_{j+1/2} + v_{j-1/2}}{2} - \frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{2} &= v_j, \\ \frac{\sigma_{j+1/2} + \sigma_{j-1/2}}{2} - \left(1 + \frac{2\eta}{h}\right) \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{2} &= s_j. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения системы (3),(4) ищется в виде:

$$v_{j+1/2} - \sigma_{j+1/2} = v_j - X_j, \quad v_{j-1/2} + \sigma_{j-1/2} = v_j + Y_j.$$

Вычисляя полусумму и полуразность приведенных уравнений, из сопоставления с (4) находим, что

$$X_j = Y_j = s_j + \eta \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h}.$$

Полученные уравнения служат обобщением соотношений на характеристиках гиперболических уравнений невязкой упругой среды. Для внутренних ячеек расчетной области они позволяют выразить величины с дробными индексами через решение нижнего слоя по времени:

$$\begin{aligned} v_{j-1/2} &= \frac{v_j + v_{j-1}}{2} + \frac{s_j - s_{j-1}}{2} + \eta \frac{v_{j+1/2} - 2v_{j-1/2} + v_{j-3/2}}{2h}, \\ \sigma_{j-1/2} &= \frac{s_j + s_{j-1}}{2} + \frac{v_j - v_{j-1}}{2} + \eta \frac{v_{j+1/2} - v_{j-3/2}}{2h}. \end{aligned} \quad (5)$$

Первое уравнение системы (5) служит для вычисления величин $v_{j-1/2}$ на шаге предиктор с помощью алгоритма трехточечной прогонки. Для этого должны быть заданы условия на границе области решения. При численной реализации были поставлены условия в напряжениях:

$$v_{1/2} + \sigma_{1/2}^0 = v_1 + s_1 + \eta \frac{v_{3/2} - v_{1/2}}{h}, \quad v_{n+1/2} - \sigma_{n+1/2}^0 = v_n - s_n - \eta \frac{v_{n+1/2} - v_{n-1/2}}{h}.$$

С помощью второго уравнения системы (5) и граничных условий вычисляются величины $\sigma_{j-1/2}$ для всех $j = 1, \dots, n + 1$. На шаге корректор по формулам (3) явным образом вычисляются скорость и упругие напряжения на верхнем слое.

Расчеты серии задач о действии П-образных импульсов напряжения на правой границе области, показали, что профили скоростей и напряжений, полученные на основе диссипативной схемы (рис. 1 а), монотонны – лишены паразитных осцилляций, характерных для схемы Неймана-Рихтмайера (рис. 1 б).

Длительность импульса в представленных расчетах составляла 0.1 по шкале безразмерного времени. Сетка по пространственной переменной состояла из 100 узлов. Шаг по времени выбирался в соответствии с равенством $\tau = h$. В этом случае искусственная диссипация в схеме отсутствует, поскольку $\alpha = \beta = 0$. Безразмерный параметр вязкости η равнялся 0.0001. С его увеличением амплитуда волны быстро убывает по мере продвижения, соответствующим образом убывает амплитуда паразитных осцилляций в схеме второго порядка. Осцилляции становятся малыми при увеличении длительности импульса и практически исчезают, если напряжение, действующее на правой границе, нарастает плавно без скачков, например, в случае Λ -образной или периодической нагрузки.

Анализ относительной погрешности вычисления скорости в зависимости от частоты волн показал, что погрешность схемы растет с увеличением частоты и с уменьшением шага по времени, оставаясь в пределах, соответствующих схеме первого порядка точности.

Заметим в заключение, что конечной целью данного исследования является разработка надежного вычислительного алгоритма для расчета течений сыпучей среды при наличии застойных зон в движущемся потоке на основе оригинальной математической модели [3]. Проведенные в [2] расчеты сдвиговых течений по схеме второго порядка точности, построенной по методу Неймана-Рихтмайера, выявили недостатки схемы, связанные с немонотонностью решений, которые препятствуют получению адекватных численных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00053).

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. В.М. Садовский

Литература

1. Иванов Г.В. Построение схем решения плоской динамической задачи теории упругости на основе аппроксимации линейными полиномами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики, Сиб.отд-ние АН СССР, Новосибирск, 1978. Вып.37. С.63–77.
2. Красненко А.Н., Садовская О.В. Математическое моделирование сдвиговых течений сыпучей среды с застойными зонами // Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления. Труды Всеросс. научн. конф., посвящ. 75-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова. - Владивосток: ИАПУ ДВО РАН. 2011, С.91–96.
3. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М., Физматлит. 2008.

Иллюстрации

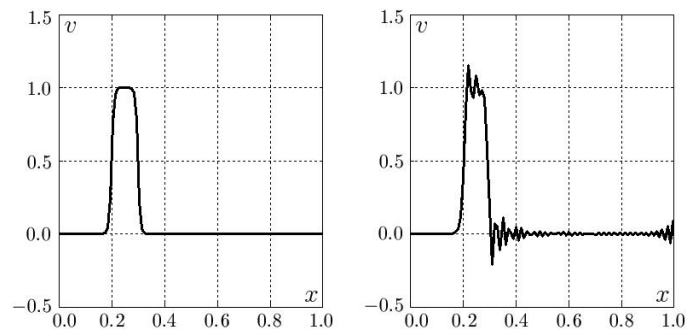


Рис. 1: Профиль скорости распространения волны: а) диссипативная схема, б) схема на сдвинутых сетках