Секция «Математика и механика»

SP-группы с чистыми кольцами эндоморфизмов

Сорокин Константин Сергеевич
Аспирант
Томский государственный университет, Механико-математический факультет, Томск, Россия
E-mail: sorokin_k@list.ru

Кольцо называется чистым, если каждый его элемент может быть представлен в виде суммы идемпотентного и обратимого элементов этого кольца. Понятие чистого кольца было предложено Николсоном в 1977 году (см. [1]) как пример кольца, в котором идемпотенты поднимаются по модулю любого левого (правого) идеала. Класс чистых колец является довольно широким и содержит, например, полусовершенные кольца (следовательно и все конечные кольца), кольца линейных операторов векторных пространств, кольца эндоморфизмов проективных модулей над правым совершенным кольцом. В свою очередь класс чистых колец является собственным подклассом класса заменяемых колец.

В случае, когда R является кольцом эндоморфизмов некоторого модуля, появляются новые описания свойства чистоты, которые могут оказаться полезными при изучении условий чистоты кольца R. Поскольку абелевы группы являются $\mathbb{Z}$–модулями, возникает естественная задача о нахождении необходимых и достаточных условий чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп.В своей работе Голдсмит и Вамош (см. [2]) рассмотрели вопросы чистоты колец эндоморфизмов периодических абелевых групп. Было показано, что кольцо эндоморфизмов тотально проективной периодической группы является чистым тогда и только тогда, когда эта группа ограничена. Кроме того, автором данной работы были изучены вопросы чистоты вполне разложимых групп без кручения (см. [3]).

В данной работе рассматриваются вопросы чистоты колец эндоморфизмов SP–групп конечного ранга без кручения (см. [4]).

Определение 1. *Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p–компонент называется SP – группой, если естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \longrightarrow A$ продолжается до сервантного вложения $A \longrightarrow \prod\limits_p A_p$.*

Определение 2. *Группа A называется самомалой, если образ каждого гомоморфизма $A \longrightarrow \bigoplus\limits_{\Re} A$ ($\Re$ — произвольный кардинал) содержится в сумме конечного числа слагаемых A.*

Теорема 1. *Пусть A — самомалая SP–группа конечного ранга без кручения, тогда кольцо эндоморфизмов группы A является чистым.*

Теорема 2. *Пусть A — SP–группа конечного ранга без кручения, не имеющая бесконечных периодических прямых слагаемых, и $A_p \cong Z_p$ для $\forall p$. Если при этом кольцо эндоморфизмов группы A является чистым, то группа A — самомалая.*

Литература

1. *Nicholson W.K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977.– №229. – p. 269-278.

2. *Goldsmith B., Vámos P.* A note on clean abelian groups // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. – 2007. – №117. – p. 181–191.

3. *Сорокин К.С.* Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Материалы XVIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». 11-15 апреля 2011 г. : Математика и механика. Математика. М., 2011.

4. *Крылов П.А.* Об одном классе смеашанных абелевых групп // Вестник ТГУ. – 2000. – т.269. – с. 29–34.

Слова благодарности

Выражаю благодарность научному руководителю Крылову Петру Андреевичу