Секция «Математика и механика»

О некоторых задачах теории восстановления.

Крючкова Анна Владимировна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: Anna.428@inbox.ru

Рассматривается общий процесс восстановления $N(t) = max\{n : \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \le t\}$, где $\{Z_i\}_{i=0}^{\infty}$ - последовательность независимых случайных величин, причем $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ имеют функцию распределения $F(t)$, Z_0- случайная величина с функцией распределения $F_0(t)$. В случае простого процесса восстановления $F_0(t) = F(t)$. Обозначим $\xi(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} Z_i - t$ время, оставшееся до следующего восстановления. Пусть $f(s) = Ee^{-sZ_1}$, $f_0(s) = Ee^{-sZ_0}$ для общего процесса восстановления. В работе представлен простой способ нахождения преобразования Лапласа k-ых моментов для процессов $N(t)$ и $\xi(t)$. Также выведены формулы для ковариации $N(t)$ и ковариации $\xi(t)$.

Теорема 1.

Существуют моменты kого порядка. Тогда верны следующие утверждения: 1. Для простого процесса восстановления:

$\int_0^{\infty} e^{-st} E\xi(t)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!} \frac{(-1)^j EZ_1^j}{s^{k+1-j}(1-f(s))} - \frac{f(s)k!}{s^{k+1}(1-f(s))}$.

2. Для общего процесса восстановления:

$\int_0^{\infty} e^{-st} E\xi(t)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!} \frac{(-1)^j}{s^{k+1-j}} (EZ_0^j + EZ_1^j \frac{f_0(s)}{(1-f(s))}) - \frac{f_0(s)k!}{s^{k+1}(1-f(s))}$.

Теорема 2.

Справедливыследующие формулы:

(1) Для простого процесса восстановления:

$\int_0^{\infty} e^{-st} EN(t)^k = (-1)^k \frac{(1-f(s))}{s} f(s) \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^k f^j(s)$.

(2) Для общего процесса восстановления:

$\int_0^{\infty} e^{-st} EN(t)^k = (-1)^k \frac{(1-f(s))}{s} f_0(s) \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^k f^j(s)$.

Пусть существуют вторые моменты Z_0 и Z_1 и $\tau > 0$. Обозначим $g(t,\tau) = E\xi(t)\xi(t+\tau)$ и $m(t,\tau) = EN(t)N(t+\tau)$, $L(t) = E\xi(t)$, $H(t) = EN(t)$ для простого процесса восстановления, $g_0(t,\tau) = E\xi(t)\xi(t+\tau)$ и $m_0(t,\tau) = EN(t)N(t+\tau)$ для общего процесса восстановления. Математические ожидания $N(t)$ и $\xi(t)$ можно найти с помощью представленных теорем. Для того, чтобы найти ковариации, достаточно найти $g(t,\tau), g_0(t,\tau), m(t,\tau), m_0(t,\tau)$.

Теорема 3.

(1) $g(t,\tau)$ является решением уравнения

$g(t,\tau) = \int_0^t g(t-y,\tau)dF(y) + \int_t^{t+\tau} (y-t)L(t+\tau-y)dF(y) + \int_{t+\tau}^{\infty} (y-t)(y-t-\tau)dF(y)$

(2) $m(t,\tau)$ является решением уравнения

$m(t,\tau) = F(t) + \int_0^t H(t-y)dF(y) + \int_0^t H(t+\tau-y)dF(y) + \int_0^t m(t-y,\tau)dF(y)$.

(3) $g_0(t,\tau) = \int_0^t g(t-y,\tau)dF_0(y) + \int_t^{t+\tau} (y-t)L(t+\tau-y)dF_0(y) + \int_{t+\tau}^{\infty} (y-t)(y-t-\tau)dF_0(y)$.

(4) $m_0(t,\tau) = F_0(t) + \int_0^t H(t-y)dF_0(y) + \int_0^t H(t+\tau-y)dF_0(y) + \int_0^t m(t-y,\tau)dF_0(y)$.

Литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей, М., 1999.

2. Севастьянов Б.А. Теория восстановления, в кн. “Итоги науки и техники”, сер. “Теор. вероятн. Мат. статист. Теорет. кибернетика “ т. 2, 1974; 99-128.

3. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления, М., 1967.