

Секция «Математика и механика»

О вероятности абсолютного разорения в модели Спарре-Андерсона с инвестициями.

Насыров Ильяс Вилевич

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: ilyas.nasyrov@gmail.com

Рассмотрим обобщение модели Спарре-Андерсона, как в [2]. Обозначим через $U(t)$ размер капитала страховщика в момент t ,

$$U(t) = ue^{rt} + c \cdot \frac{e^{rt} - 1}{r} - \int_0^t e^{r(t-x)} dZ(x),$$

где u – стартовый капитал, $N(t)$ – количество поступивших исков к моменту t , $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, $c \cdot \frac{e^{rt}-1}{r}$ – накопленная к моменту t сумма непрерывной ренты. Момент абсолютного разорения τ определяется

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 : U(t) \leq -\frac{c}{r} \right\},$$

$\tau = \infty$, если инфимум не достигается. Введем дисконтированную штрафную вектор-функцию Gerber-Shiu, будем считать, что иски поступают в соответствии с марковским процессом поступления (MAP)

$$\Phi(u) = (\Phi_1(u), \dots, \Phi_n(u))^T,$$

$$\Phi_i(u) = E \left\{ e^{-\delta\tau} \omega(U(\tau-), |U(\tau)|) I(\tau < \infty) | U(0) = u, J(0) = i \right\}, u > -\frac{c}{r},$$

где I – индикаторная функция, $\delta \geq 0$ – ставка дисконтирования, $J(0)$ – начальная фаза в марковской цепи, ω – измеримая функция на $(-c/r, \infty) \times [c/r, \infty)$. В частности, при $\delta = 0$, $\omega \equiv 1$ функция штрафа есть не что иное, как вероятность абсолютного разорения,

$$\psi(u) = (\psi_1(u), \dots, \psi_n(u))^T, \psi_i(u) = P \{ \tau < \infty | U(0) = u, J(0) = i \}, u > -\frac{c}{r}, i \in 1, \dots, n$$

В работе представлена общая методология для получения функции штрафа Gerber-Shiu в явном виде, когда функция ω зависит только от второго аргумента - дефицита капитала в момент разорения. Получена система интегро-дифференциальных уравнений для функции штрафа в предположении, что иски имеют матрично-экспоненциальное распределение (Matrix-Exponential). Для некоторых частных случаев в явном виде получена вероятность абсолютного разорения. Также рассмотрен случай, когда ставки по вкладам и кредитам являются ступенчатыми функциями в зависимости от текущего размера капитала компании.

Литература

1. Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1970. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., New York.
2. Mitric I.R., Badescu A.L., Stanford D.A., 2011. On the absolute ruin problem in a Sparre-Andersen risk model with constant interest. Insurance: Mathematics and Economics 50 (2012) pp. 167-178.
3. Rabenstein, A.L., 1972. Introduction to Ordinary Differential Equations. Second Enlarged Edition with Applications. Academic Press, New York.

Слова благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Булинской Екатерине Вадимовне за обсуждение задачи.