Секция «Математика и механика»

Неабелевы алгеброиды Ли над пространствами бесконечных струй

Крутов Андрей Олегович

Ивановский государственный энергетический университет, Факультет информатики и вычислительной техники, Иваново, Россия
E-mail: krutov@math.ispu.ru

В докладе показано, что представления нулевой кривизны для дифференциальных уравнений в частных производных (например, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния) образуют естественный класс неабелевых алгеброидов Ли. Ниже мы указываем все компоненты данных структур (в частности, якорь) и реализуем их в терминах гомологических векторных полей — дифференциалов — на суперрасслоениях.

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли с базисом $e_1, \ldots, e_d$ (всякое $\mathfrak{g}$-значное представление нулевой кривизны есть дифференциальная 1-форма $\alpha = \alpha_i^k e_k\, dx^i$, удовлетворяющая уравнению Маурера–Картана, здесь α_i^k — гладкие функции на уравнении, x^i — независимые переменные, задающие точки базы M^n). Возьмём расслоения $\chi\colon \Lambda(M^n) \otimes \mathfrak{g} \to M^n$ и ξ со слоем $\mathfrak{g}$ над M^n; определим суперрасслоение $\Pi\xi$ как расслоение над той же базой, получаемое заменой чётности координат в слоях ξ. Теперь рассмотрим сумму Уитни $J^\infty(\chi) \times_{M^n} J^\infty(\Pi\xi)$ расслоений бесконечных струй сечений расслоения χ и нечётного расслоения $\Pi\xi$. Всякому $\mathfrak{g}$-значному представлению нулевой кривизны α соответствует теория когомологий, дифференциал в которой есть реализация [1,2] неабелева алгеброида Ли в терминах нечётного эволюционного поля Q.

Утверждение. Гомологическое векторное поле Q, задающее структуру неабелева алгеброида Ли, равно

$$Q = \partial^{(\alpha)}_{[b,\alpha]+\bar{d}_h b} + \frac{1}{2}\partial^{(b)}_{[b,b]}, \qquad [Q,Q] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q^2 = 0,$$

где α_μ^k — чётные координаты вдоль слоёв χ, соответствующие $\mathfrak{g}$-значным 1-формам; b^k — нечётные координаты вдоль слоёв в $\Pi\xi$; c_{ij}^k — структурные константы в $\mathfrak{g}$, $[b^i, b^j]^k = c_{ij}^k b^i b^j$; $\bar{d}_h$ — горизонтальный дифференциал, наследуемый с базы M^n; оператор $\partial_\alpha = \bar{d}_h + [\cdot, \alpha]$ — якорь, $[b,\alpha]^k = c_{ij}^k b^i \alpha_a^j\, dx^a$; $\partial^{(\alpha)}$ и $\partial^{(b)}$ — эволюционные производные.

Доказательство. Антикоммутатор $[Q,Q] = 2Q^2$ нечётного векторного поля Q с самим собой — это также векторное поле, значит достаточно доказать равенство нулю коэффициентов перед $\partial/\partial\alpha$ и $\partial/\partial b$ в

$$Q^2 = \left(\partial^{(\alpha)}_{[b,\alpha]+\bar{d}_h b} + \tfrac{1}{2}\partial^{(b)}_{c_{ij}^k b^i b^j}\right)\left(\partial^{(\alpha)}_{[b,\alpha]+\bar{d}_h b} + \tfrac{1}{2}\partial^{(b)}_{c_{ij}^k b^i b^j}\right).$$

В силу того, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли [4], $(\tfrac{1}{2}\partial^{(b)}_{c_{ij}^k b^i b^j})^2 = 0$. По определению, $[b,b]^k = c_{ij}^k b^i b^j$. Так как $[b,b]$ не зависит от α, то $(\partial^{(\alpha)}_{[b,\alpha]+\bar{d}_h b})(\tfrac{1}{2}\partial^{(b)}_{c_{ij}^k b^i b^j}) = 0$. Отсюда

$$Q^2 = \left(\partial^{(\alpha)}_{[b,\alpha]+\bar{d}_h b} + \tfrac{1}{2}\partial^{(b)}_{c_{ij}^k b^i b^j}\right)\left(\partial^{(\alpha)}_{[b,\alpha]+\bar{d}_h b}\right) = -\partial^{(\alpha)}_{[b,[b,\alpha]+\bar{d}_h b]} + \tfrac{1}{2}\partial^{(\alpha)}_{[[b,b],\alpha]+\bar{d}_h([b,b])}$$
$$= \partial^{(\alpha)}_{-[b,[b,\alpha]-\bar{d}_h b]+\frac{1}{2}[[b,b],\alpha]+\frac{1}{2}\bar{d}_h([b,b])}.$$

Рассмотрим выражение $-[b,[b,\alpha]-\bar{d}_h b]+\frac{1}{2}[[b,b],\alpha]+\frac{1}{2}\bar{d}_h([b,b])$. Равенство нулю этого выражение при произвольных b эквивалентно равенству нулю его значения на паре сечений $p_1,p_2\in\Gamma(\xi)$ (берётся альтернированная сумма по всем перестановкам). Для $\left(\frac{1}{2}[[b,[b,\alpha]-[b,[b,\alpha]]]\right)(p_1,p_2)$, имеем

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}[[p_1,p_2],\alpha]-\tfrac{1}{2}[[p_2,p_1],\alpha]-[p_1,[p_2,\alpha]]+[p_2,[p_1,\alpha]]&=[[p_1,p_2],\alpha]-[p_1,[p_2,\alpha]]-[p_2,[\alpha,p_1]]\\&=-[\alpha,[p_1,p_2]]-[p_1,[p_2,\alpha]]-[p_2,[\alpha,p_1]=0.\end{aligned}$$

Значение выражения $\frac{1}{2}\bar{d}_h([b,b])-[b,\bar{d}_h b]$ на паре сечений p_1, p_2 равно

$$\tfrac{1}{2}\bar{d}_h([p_1,p_2])-\tfrac{1}{2}\bar{d}_h([p_1,p_2])-[p_1,\bar{d}_h p_2]+[p_2,\bar{d}_h p_1]=\bar{d}_h([p_1,p_2])-[p_1,\bar{d}_h p_2]-[\bar{d}_h p_1,p_2]=0.$$

В итоге получаем

$$Q^2=\partial^{(\alpha)}_{-[b,[b,\alpha]-\bar{d}_h b]+\frac{1}{2}[[b,b],\alpha]+\frac{1}{2}\bar{d}_h([b,b])}=\partial^{(\alpha)}_0=0,$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание. Якорь $\partial_\alpha=\bar{d}_h+[\cdot,\alpha]$ является тем самым дифференциалом, который построил М. Марван [3] при исследовании неустранимости калибровочными преобразованиями спектрального параметра в представлениях нулевой кривизны. Мы же показали, что этот дифференциал естественен потому, что поставляет пример классической конструкции алгеброида Ли в неабелевом случае.

Литература

1. Вайнтроб А. Ю., Алгеброиды Ли и гомологические векторные поля // УМН. 1997. No. 52:2(314). С. 161–162.

2. Киселёв А. В., ван де Лёр Й. В., Вариационные алгеброиды Ли и гомологические эволюционные векторные поля // ТМФ. 2001. No. 167:3. С. 432–447.

3. Marvan M., On the horizontal gauge cohomology and non-removability of the spectral parameter // Acta Appl. Math. 2002. No. 72:1–2. С. 51–65.

4. Voronov T., Graded manifolds and Drinfeld doubles for Lie bialgebroids // Quantization, Poisson Brackets, and Beyond (Contemp. Math., Vol. 315, T. Voronov, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI. 2002. С. 131-168.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. В. Киселёву за постановку задачи, многочисленные обсуждения и содействие на всех этапах исследования.