Секция «Математика и механика»

Описание топологии слоения Лиувилля для динамических систем "накрывающих"бильярдов.

Фокичева Виктория Викторовна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: arinir@yandex.ru

Рассмотрим область Ω на плоскости R^2, ограниченную несколькими квадриками из софокусного семейства (1):

$$\frac{x^2}{a-\Lambda}+\frac{y^2}{b-\Lambda}=1 \quad a>0, b>0, \qquad (1)$$

причем граница области не содержит точек излома с углами $\frac{3\pi}{2}$. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области Ω с естественным отражением на границе $P=\partial\Omega$. Эту систему назовём "биллиардом в области". Будем считать, что в точках, где граница P не гладкая (тогда как было сказано выше угол излома обязательно равен $\frac{\pi}{2}$) траектории системы можно доопределить по непрерывности: а именно, попав в вершину угла на границе, точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Таким образом, фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x,v)| \quad x\in\Omega, v\in T_xR^2, |v|>0\}\sim$$

где отношение эквивалентности задаётся так

$$(x_1,v_1)\sim(x_2,v_2)\Leftrightarrow x_1=x_2\in P, \quad |v_1|=|v_2| \quad \text{и} \quad v_1-v_2\perp T_{x_1}P. \qquad (2)$$

Здесь через T_xP обозначена касательная плоскость к области Ω в точке x, а через $|v|$ – евклидова длина вектора v.

Теорема. (Якоби, Шаль) . *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n-мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n-2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

Замечание. Софокусные квадрики в многомерном случае иногда называются конфокальными. В плоском двумерном случае из теоремы Якоби-Шаля следует, что касательные в любой точке траектории касаются эллипса или гиперболы, софокусных с семейством квадрик, образующих границу P области Ω. Таким образом, данная "биллиардная" система обладает двумя независимыми интегралами:

1. $|v|$ — модуль вектора скорости,

2. Λ — параметр софокусной квадрики.

Известно что эти интегралы независимы . Будем считать, что модуль скорости фиксирован и равен единице. Ограничим биллиардную систему (изначально заданную на фазовом пространстве M^4) на трехмерную изоэнергетическую поверхность Q^3, задаваемую уравнением $|v| = 1$. При этом величина $|v|$ играет роль "энергии".

Определение. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_1^4, обладающих соответственно, интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2. Рассмотрим изоэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Они называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 to Q_2^3$, который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

В силу теоремы Лиувилля многообразие Q^3 расслоено на торы и особые слои (фактически оно представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев друг с другом по граничным торам). Рассмотрим базу возникающего слоения Лиувилля на Q^3. Эта база является одномерным графом W, называемым грубой молекулой . В вершинах W расположены “атомы”, описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля. Однако этот граф W не описывает полностью топологию слоения Лиувилля, так как он не содержит всей информации о склейках регулярных окрестностей особых слоев. Оказывается, для описания топологии слоения необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Из полученных матриц перехода — матриц склейки — вычисляются числовые метки r, ϵ и n, которые, будучи расставленными на грубой молекуле W, полностью определяют слоение Лиувилля с точностью до послойной эквивалентности и уже не зависят от выбора допустимых базисов на граничных торах. Получающийся граф с метками называется меченой молекулой W^*, т.е. инвариантом Фоменко-Цишанга.

Рассмотрим область, ограниченную двумя софокусными эллипсами и обозначим её Ω_1. Рассмотрим k экземпляров области Ω_1, в каждом из которых сделан разрез вдоль нижнего отрезка координатной оси. Склеим их по следующему правилу – левый берег разреза i-ой области склеивается с правым берегом разреза $i+1$-ой. Оставшиеся берега разрезов первой и последней области также склеиваются. Полученную область будем обозначать Δ_k. Если же не склеивать первую и последнюю область Ω_1, а на берегах разреза оставить отражение, то полученную область будем обозначать Δ'_k. Задача о рассмотрении биллиардных систем в подобных областях была впервые предложена Е.А.Кудрявцевой. В докладе будет описана топология слоения Лиувилля для биллиардных систем в областях Δ_k и Δ'_k в терминах меченой молекулы Фоменко-Цишанга.

Литература

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. 1,2, Ижевск:РХД, 1999.

2. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.:Наука, 1989.

Слова благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю – академику А.Т.Фоменко за постановку задачи, а также доценту А.А.Ошемкову, доценту Е.А. Кудрявцевой, кандидату ф.м. наук П.Е.Рябову за ряд ценных и полезных замечаний и особенно академику А.Т.Фоменко за существенную помощь и постоянное внимание к работе. Настоящая работа выполнена в Московском Государственном университете им. М.В. Ломоносова при поддержке гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, в ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова" по договору № 11.G34.31.0054.