Секция «Математика и механика»

Потенциал объемных масс и обобщенное решение задачи Коши для параболического уравнения с растущей правой частью

Каменская Екатерина Алексеевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: kamenskayakaterina@gmail.com

В слое $D = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ (где $T > 0$ фиксировано) рассматривается равномерно-параболический оператор недивергентного вида

$$Lu := \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu,$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:
a) $\exists \delta_0 > 0 : \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\sigma_i\sigma_j \geqslant \delta_0\sigma^2, \forall (x,t) \in \bar{D}, \forall \sigma \in \mathbb{R}^n$;
b) $a_{ij}, (i,j = 1, ..., n)$ - ограничены и непрерывны в $\bar{D}$, и, кроме того, $|a_{ij}(x',t) - a_{ij}(x,t)| \leqslant \omega_0(|x'-x|), \forall (x',t), (x,t) \in D$; где $\omega_0 : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ - модуль непрерывности ([1], стр.147), удовлетворяющий *условию Дини:*

$$\int_0^t \frac{\omega_0(z)}{z} dz < \infty, t > 0; \tag{1}$$

c) $b_i, (i = 1, ..., n), c$ непрерывны и ограничены в $\bar{D}$.
В настоящей работе доказывается, что обобщенный потенциал объемных масс является (единственным) обобщенным решением (определение обобщенного решения см. в [2]) задачи Коши:

$$Lu = f \text{ в } D, \quad u|_{t=0} = 0 \text{ в } \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где функция $f : D \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, и справедлива оценка:

$$\exists C > 0 : |f(x,t)| \leqslant C\frac{\omega(t)}{t}, \forall (x,t) \in D,$$

где $\omega : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ удовлетворяет условиям: $\omega(0) = 0$; ω непрерывна; ω не убывает; $\exists c > 0 : \frac{\omega(z_2)}{z_2} \leqslant c\frac{\omega(z_1)}{z_1}, \forall z_2 \geqslant z_1 > 0$; и, кроме того, для ω выполнено условие Дини(1). Устанавливается характер гладкости обощенного решения и его градиента по пространственным переменным.
Ранее разрешимость в обощенном смысле задачи (2) и характер гладкости ее решения был получен в [2] для f, равномерно непрерывной и ограниченной в $\bar{D}$.

Литература

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.М.: Наука, 1977.
2. Baderko E. Generalized solution of the Cauchy problem for non-divergence parabolic equations // Annales Univ. Sci. Budapest.2010, N 53, p. 7-15.