Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Об одном нелинейном соболевском уравнении

Аристов Анатолий Игоревич

Соискатель

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия

E-mail: ai_aristov@mail.ru

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u - u - |u|^q u\right) + b\Delta u - au + \mu(x,t)\,|u|^r u = 0,\ u(x,0) = u_0(x),\ \left.u(x,t)\right|_{\partial\Omega} = 0$$

Ранее эта задача исследовалась автором в [1]. Данная работа усиливает результаты, изложенные в названной статье. Как и в [1], будем считать, что $u(x,t)$ — действительнозначная функция, $t > 0$, $x \in \Omega$, где Ω — ограниченное подмножество R^N с границей $\partial\Omega \in C^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0;1]$, $a,\ b \in R$, $q \in [1;\ 4]$, $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$. Кроме того, в [1] предполагалось, что $N = 3$, $r \in (1;\ 2]$, $\mu(x,t) \in C\left[0;\ T;\ L_{6/(2-r)}(\Omega)\right)$.

Задача описывает нестационарные процессы в полупроводниках.

Определение. Обобщенным решением задачи назовем такое $u \in X_T \equiv C^1[0;\ T;\ H_0^1(\Omega))$, что

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u - u - |u|^q u\right) + b\Delta u - au + \mu\,|u|^r u,\ w\right\rangle = 0,\ \left.u\right|_{t=0} = u_0\ \forall w \in H_0^1(\Omega),\ \forall t \in [0;T).$$

В [1] при названных предположениях были доказаны три теоремы. В первой утверждалось, что задача однозначно разрешима в X_T с некоторым $T \in (0;\infty]$, причем если $T < \infty$, то $\lim\limits_{t\to T-}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$. Вторая теорема давала достаточные условия для разрешимости задачи глобально по времени ($T = \infty$), а также оценку вида $T \geqslant T_1 > 0$ (для T_1 найдена квадратурная формула). В третьей теореме дополнительно предполагалось, что μ находится в C^1 по времени, и параметры задачи удовлетворяют некоторым неравенствам. Была выведена оценка вида $T \leqslant T_2$ (для T_2 найдена явная формула).

Новые результаты состоят в следующем.

Утверждение. *Теоремы из [1] остаются в силе, если считать, что $N = 2$, $r \in (1;\ \infty)$, μ находится в $L_4(\Omega)$ по x и имеет соответствующую гладкость по t (при тех же ограничениях на другие параметры).*

Теорема. *Пусть $N = 2$, $r \in (1;\ \infty)$, $\mu(x,t) \in C^1[0;\ T;\ L_4(\Omega))$, причем $\mu \geqslant 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t, $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$, $1 \leqslant q < 19/10$, $r(19/10 - q) > 4q$. Пусть $\|\partial\mu/\partial t\|_{L_4(\Omega)}$ — ограниченная функция от $t \in [0;T)$. Пусть величина $\int_\Omega \mu(x,0)|u_0|^{r+2}dx$ достаточно большая. Тогда $T \leqslant T_3$ (для T_3 найдена явная формула).*

Литература

1. Аристов А. И. О начально-краевой задаче для одного нелинейного уравнения соболевского типа, содержащего переменный коэффициент // Математические заметки. 2012. Т. 91, выпуск 5. С. 643–653.

2. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.