Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Об одной неклассической задаче для уравнения Лапласа в круге с граничным условием специального вида

Нефедов Павел Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: p_nefedov@mail.ru

Данная работа является продолжением цикла работ по моделированию адгезионных взаимодействий в механике деформируемых твердых тел [1]. Основной целью работы является отыскание и исследование единственности классического решения задачи Лапласа в круге с граничным условием специального вида.
В двумерной области D, представляющей единичный круг $D = \{(r, \theta):\ r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, рассматривается следующая краевая задача для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad (r, \theta) \in D, \tag{1}$$

$$u_r + \alpha u_{r\theta} + \beta u_{\theta\theta}|_{r=1} = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{2}$$

где α и β - некоторые вещественные константы. Решение задачи (1)-(2) ищется в классе $u \in C^2(\overline{D})$. Заметим, что краевая задача для уравнения Лапласа (1)-(2) не является классической, так как краевое условие (2) не является ни одним из условий первого, второго или третьего родов, которые традиционно рассматриваются в математической физике при изучении граничных задач для уравнения Лапласа [2].
Была доказана следующая теорема.
Теорема. Необходимым условием разрешимости краевой задачи (1)-(2) является выполнение следующих требований, накладываемых на граничную функцию $f = f(\theta)$:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0,\ f(0) = f(2\pi),\ f(\theta) \in C^{2,\delta}(0, 2\pi), \quad 0 < \delta < 1. \tag{3}$$

В зависимости от соотношения между действительными параметрами α и β имеют место также следующие утверждения:
1) Случай $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$:
1.a) Если $\beta = \frac{1}{m}$, где некоторое $m \in \mathrm{N}$, то помимо выполнения условий (3) необходимо потребовать, чтобы имели место следующие равенства:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta \, d\theta = 0. \tag{4}$$

Решение задачи (1)-(2) в таком случае представимо, причем единственным образом в виде следующего тригонометрического ряда:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) = a_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \\ + r^m \left(\overline{a_m} \cos m\theta + \overline{b_m} \sin m\theta\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где коэффициенты $a_0,\ \overline{a_m},\ \overline{b_m}$ являются произвольными действительными числами, а

$$a_n = \frac{A_n}{n(1-\beta n)},\ b_n = \frac{B_n}{n(1-\beta n)}.$$

1.б) Если для любого натурального числа $k \in \mathrm{N}$: $\beta k - 1 \neq 0$, то решение задачи (1)-(2) представимо, причем единственным образом, в виде следующего тригонометрического ряда:

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n(1-\beta n)} \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right), \tag{6}$$

где коэффициент A_0 является произвольным действительным числом.
2) В общем случае, когда $\alpha\beta \neq 0$, решение задачи (1)-(2) также представимо, причем единственным образом, в виде следующего тригонометрического ряда:

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right), \tag{7}$$

где коэффициент A_0 является произвольным действительным числом, а коэффициенты $A_n,\ B_n$ $(n \geq 1)$ являются коэффициентами Фурье.

Литература

1. Лурье С.А., Тучкова Н.П. Континуальные модели адгезии для деформируемых твердых тел и сред с наноструктурами // Композиты и наноструктуры, 2009, 2(2), стр. 25-43.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004, 798 стр.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность академику РАН Моисееву Е.И. за научное руководство, а также д.ф.-м.н. Лурье С.А. за постановку и обсуждение данной задачи.
Работа выполнена в рамках программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-7332.2010.9) и поддержки молодых ученых-кандидатов наук (проект МК-7128.2012.9), фонда РФФИ (проекты 11-01-12081-офи-м-2011, 11-01-00164-а) и при частичной финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».