Секция «Математика и механика»

Об аналоге неравенства Буркхолдера-Ганди-Дэвиса для фрактального броуновского движения

Муравлёв Алексей Анатольевич
Аспирант
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Отдел теории вероятностей и математической статистики, Москва, Россия
E-mail: almurav@gmail.com

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ задано фрактальное броуновское движение $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ с параметром Харста $H \in (0,1)$, т.е. определён выходящий из нуля гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(s,t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad s,t \geq 0.$$

При $H = 1/2$ процесс B^H является стандартным броуновским движением B. Однако, при $H \neq 1/2$ процесс B^H не является ни семимартингалом, ни марковским процессом.

Классичесткие неравенства Бурхолдера-Ганди-Дэвиса для стандартного броуновского движения B утверждают, что для любого момента остановки τ относительно естественной фильтрации B и $p > 0$ справедливо

$$c(p)\mathsf{E}\tau^{p/2} \leq \mathsf{E}\max_{s\leq\tau}|B_s|^p \leq C(p)\mathsf{E}\tau^{p/2}, \tag{1}$$

где $c(p)$ и $C(p)$ – некоторые универсальные константы.

В работе [1] А. Новиков и Э. Валкейла с помощью мартингальных преобразований доказали аналоги неравенств (1) для фрактального броуновского движения B^H:

$$c(p,H)\mathsf{E}\tau^{pH} \leq \mathsf{E}\max_{s\leq\tau}|B_s^H|^p \leq C(p,H)\mathsf{E}\tau^{pH}, \quad H \in (1/2, 1),$$

$$c(p,H)\mathsf{E}\tau^{pH} \leq \mathsf{E}\max_{s\leq\tau}|B_s^H|^p, \quad H \in (0, 1/2),$$

где $c(p,H)$ и $C(p,H)$ – некоторые универсальные константы.

Основной результат состоит в получении недостающей верхней оценки:

$$\mathsf{E}\max_{s\leq\tau}|B_s^H|^p \leq C(p,H)\mathsf{E}\tau^{pH}, \quad H \in (0, 1/2).$$

В основе доказательства лежит сведение исходной задачи к получению максимальных неравенств для семейства одномерных марковских процессов $X^{\alpha,\beta} = (X_t^{\alpha,\beta})_{t\geq 0}$, где

$$X_t^{\alpha,\beta} = t^\alpha \int_0^t s^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} dB_s,$$

$\alpha < 1/2$, $\beta > 0$, являются решениями стохастических дифференциальных уравнений:

$$dX_t^{\alpha,\beta} = dB_t - (\beta - \alpha/t)X_t^{\alpha,\beta}dt, \quad X_0^{\alpha,\beta} = 0.$$

Литература

1. Novikov A., Valkeila E., On some maximal inequlities for fractional Brownian motions. Preprint 186, University of Helsinki (1998)