## Секция «Математика и механика»

### Стохастические версии неравенств Пуанкаре и логарифмического Соболева

***Абакирова Айгуль Тилековна***

*Аспирант*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия*

*E-mail: abakirova@gmail.com*

Пусть $\xi = \xi(w)$– стандартная нормальная случайная величина, $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, функция $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{P}_\xi)$. Известное *неравенство Пуанкаре - Чернова* утверждает, что $\mathsf{D}f(\xi) \leq \mathsf{E}(f'(\xi))^2$.

Предположим, что $f \in C^1(\mathbb{R}),\ f, f' \in L^2(\mathbb{P}_\xi)$. Тогда из *логарифмического неравенства Соболева*, доказанного Гроссом, следует, что $f \in L^2 \log L(\mathbb{P}_\xi)$ и энтропия $\mathrm{Ent} f^2(\xi) := \mathsf{E}f^2(\xi) \log f^2(\xi) - \mathsf{E}f^2(\xi) \log \mathsf{E}f^2(\xi) \leq 2\,\mathsf{E}(f'(\xi))^2$.

Различные доказательства классических неравенств можно найти в [2]. Продуктивной оказывается идея рассматривать $\xi$ как маргинальное значение броуновского движения $B = (B_t)_{t\geq 0}$ и использовать методы стохастического исчисления ([1]). Итак, для стандартного броуновского движения верно $\mathsf{D}f(B_T) \leq T\mathsf{E}(f'(B_T))^2$ и $\mathrm{Ent} f^2(B_T) \leq 2T\mathsf{E}(f'(B_T))^2$.

Рассмотрим *косое броуновское движение* $X = B^\alpha = (B^\alpha_t)_{t\geq 0}$ с параметром $\alpha \in [0,1]$, оно получается из броуновского движения, если независимо поменять знак каждой экскурсии из нуля, так чтобы она была положительной с вероятностью $\alpha$. Косое броуновское движение - единственное сильное решение уравнения $X_t = B_t + (2\alpha - 1)L^0_t(X)$, здесь $L^x_t(X)$ – локальное время процесса в точке $x$ ([3]).

Мы получим версии неравенств Пуанкаре и логарифмического Соболева для косого броуновского движения.

**Теорема.** Пусть функция $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{P}_\xi)$. Тогда

$$\mathsf{D}f(X_T) \leq \mathsf{E}(\gamma f_1^2(X_T) + (T-\gamma) f_2^2(X_T)),$$

где $\gamma = \int_0^\infty L^x_T\,dx$ (другими словами, $\gamma = \int_0^T I_{\{X_t \geq 0\}}\,dt$ – время, проведенное процессом на положительной полуплоскости), $0 \leq \gamma \leq T$, $f_1(x) = f'(x) - \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} f'(-x) I_{\{x<0\}}$, $f_2(x) = f'(x) + \frac{2\alpha-1}{\alpha} f'(-x) I_{\{x>0\}}$, $\alpha \in (0,1)$.

В свою очередь

$$\mathrm{Ent} f^2(X_T) \leq 2\mathsf{E}(\gamma g_1^2(X_T) + (T-\gamma) g_2^2(X_T)),$$

где $g_1(x) = f'(x) - \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} f'(-x) \frac{f(-x)}{f(x)} I_{\{x<0\}}$, $g_2(x) = f'(x) + \frac{2\alpha-1}{\alpha} f'(-x) \frac{f(-x)}{f(x)} I_{\{x>0\}}$.

Для $\alpha = 0, \frac{1}{2}$ и 1 неравенства принимают классический вид.

Результат получен с помощью мартингального метода, техники для обобщенных диффузий ([4]), версии формулы Ито-Танака ([5]).

### Литература

1. А. Н. Ширяев, Доказательство неравенства Пуанкаре–Чернова и логарифмического неравенства Соболева методами стохастического исчисления для броуновского движения, *УМН*, **61**:3 (2006), 177–178.

2. C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto and G. Scheffer (2000). Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques. *Panor. Synthèses* **10**.

3. J. M. Harrison, L. A. Shepp (1981). On skew Brownian motion. *Ann. Probab.* **9**:2, 309–313.

4. A. Lejay (2006). On the constructions of the skew Brownian motion. *Probab. Surveys* **3**, 413–466.

5. G. Peskir, A. N. Shiryaev (2006). Optimal stopping and free boundary problems. Birkhäuser, Basel.