Секция «Математика и механика»

Об одной задаче о разладке для броуновского движения

Сокко Анастасия Александровна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: Anastasiya.Sokko@yandex.ru

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы броуновское движение $B = (B_t)_{0\le t\le T}$ и наблюдаемый процесс $X = (X_t)_{0\le t\le T}$, $0 < T < \infty$,

$$dX_t = \mu I(t \ge \theta)dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = 0, \quad \mu \ne 0, \quad \sigma > 0.$$

Неизвестный момент разладки $\theta = \theta(\omega)$ и броуновское движение $B = (B_t)_{0\le t\le T}$ независимы, θ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, T]$(с атомом в нуле), т. е.

$$P(\theta = 0) = \pi, \quad \pi \in [0, 1), \quad F_\theta(x) = P(\theta \le x) = \pi + (1-\pi)\frac{x}{T}, \quad 0 \le x \le T.$$

Обозначим через $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}^X_t)_{0\le t\le T}$ — естественную фильтрацию процесса X,

$\mathcal{F}^X_t = \sigma(X_s, 0 \le s \le t)$, а через $\mathcal{M}_{[0,T]}$ — класс моментов остановки $\tau = \tau(\omega)$ относительно фильтрации $\mathcal{F}^X$, $0 \le \tau \le T$.

Задача состоит в том, чтобы основываясь на наблюдениях за процессом X, оптимально предсказать наступление разладки. В работе рассматриваются абсолютный и байесовский критерии оптимальности соответственно:

$$V(\pi) = \inf_{\tau\in\mathcal{M}_{[0,T]}} E|\theta - \tau|,$$

$$W(\pi) = \inf_{\tau\in\mathcal{M}_{[0,T]}} \left(P(\tau < \theta) + cE(\tau - \theta)^+\right), c > 0.$$

Оба критерия сводятся к классическим задачам об оптимальной остановке для однородного марковского процесса. Рассматривается структура оптимальных моментов отановки, выводятся интегральные уравнения для границ областей остановки и продолжения наблюдений. Доказывается существование и единственность решений полученных интегральных уравнений.

Литература

1. P. V. Gapeev, G. Peskir. The Wiener Disorder Problem with Finite Horizon. //Stochastic Processes and their Applications. 2006. 116(12). 1770–1791.

2. E. A. Feinberg, A. N. Shiryaev. Quickest detection of drift change for Brownian motion in generalized Bayesian and minimax settings. //Statistics & Decisions. 2006. 24(4). 445 – 470.

3. G. Peskir, A. N. Shiryaev. Optimal Stopping and FreeBoundary Problems. Birkhauser Verlag, 2006.

4. A. N. Shiryaev. A remark on the quickest detection problems. //Statistics & Decisions. 2004. 22. 79-82.