Секция «Математика и механика»

Эффективная хаусдорфова размерность и случайность по классам мер

Андреев Михаил Александрович

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: amishaa@mail.ru

Эффективная хаусдорфова размерность точки в канторовском пространстве Ω (=бесконечной последовательности нулей и единиц) определяется следующим образом [2]. Для данного $\alpha \in (0, 1)$ будем называть точку α-нулевой, если существует алгоритм, который по рациональному $\varepsilon > 0$ указывает покрытие этой точки перечислимым семейством интервалов, у которых сумма длин, возведённых в степень α, не превосходит ε. (Интервалами в канторовском пространстве называются множества вида $x\Omega$, то есть множества последовательностей, имеющих данное начало x. Длина такого интервала определяется как $2^{-|x|}$, где $|x|$ — длина двоичного слова x.) Эффективной размерностью точки x называется точная нижняя грань тех α, при которых x является α-нулевой.

В работе Раймана (Jan Reimann) [3] предложено эквивалентное определение эффективной хаусдорфовой размерности в терминах случайности относительно класса α-ёмких мер. Мера μ на Ω называется α-ёмкой, если $\mu(x\Omega) \leq 2^{-}\alpha|x|$ для всех слов x. Последовательность называется неслучайной относительно класса мер $\mathcal{M}$ (см. [1]), если существует алгоритм, который по рациональному $\varepsilon > 0$ указывает покрытие этой точки перечислимым семейством интервалов, у которых по любой мере из класса $\mathcal{M}$ суммарная мера не превосходит ε.

Теорема (Jan Reimann, [3])

Эффективная размерность любой точки $\omega \in \Omega$ равна точной нижней грани тех α, при которых ω случайна относительно класса всех α-ёмких мер.

Доказательство Раймана не прямое и довольно сложное. Мы приводим прямое доказательство с использованием простых комбинаторных соображений о потоках и разрезах.

Литература

1. Биенвеню Л. Алгоритмические тесты и случайность относительно классов мер / Л. Биенвеню, П. Гач, М. Хойруп, К. Рохас , А. Шень // Труды математического института им. В.А. Стеклова, 2011, т. 274. с. 1 – 62.

2. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Шень А. Колмогороская сложность и алгоритмическая случайность. - М.:МЦНМО, 2010.

3. Reimann J. Effectively closed set of measures and randomness. [preprint электронная версия] - http://www.math.psu.edu/reimann/Publications/closed_sets_measures_preprint.pdf