Секция «Математика и механика»

Свойства матрицы циклов примитивного k-набора.

Мокеев Андрей Васильевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: avmokeev@gmail.com

Пусть есть k-набор матриц $\mathcal{A} = (A_1, \cdots, A_k)$, где $A_s = (a^s_{ij}) \in M_n(\mathbb{B})$, $\mathbb{B}$ – булево полукольцо и $n > 1$, и пусть $l_1, \cdots, l_k$ - неотрицательные целые числа.

Определение 1 *([1])Произведение Гурвица $\mathcal{A}^{(l)} = (A_1, \cdots, A_k)^{(l_1, \cdots, l_k)}$ – это сумма всех таких матриц, что каждая матрица равна произведению одной из расстановок ровно l_1 матриц A_1,$\cdots$, l_k матриц A_k.*

Определение 2 *([1]) Назовем k-набор примитивным, если существует неотрицательные целые числа $l_1, \cdots, l_k$ такие, что соответствующее произведение Гурвица $A^{(l)} > 0$. Определим экспоненту Виландта k-набора через наименьшее значение суммы $l_1 + \cdots + l_k$ по всем таким $l_1, \cdots, l_k$, для которых $\mathcal{A}^{(l)} > 0$.*

Любому k - набору $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ поставим в соответствие k-цветный ориентированный граф $D(\mathcal{A})$ с вершинами $1, 2, \ldots, n$, у которого существует ребро цвета l из вершины i в вершину j тогда и только тогда, когда $a^l_{ij} = 1$. И, наоборот, каждому k-цветному ориентированному графу D сопоставим k-набор $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ $n \times n$ – неотрицательных матриц. Далее будем пользоваться терминологией ориентированного графа из статьи [2]. Пусть ω – любой цикл в графе, определим $(\#)\omega$ как $k \times 1$ вектор, у которого i координата – число ребер в ω цвета i. Положим $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_c$ – циклы в $D(\mathcal{A})$ и $C(D(\mathcal{A}))$ – $k \times c$ матрица, у которой i столбец $(\#)\gamma_i$. Матрицу $C(D(\mathcal{A}))$ будем называть матрицей циклов.

В докладе будет рассмотрено несколько простых свойств примитивных матриц: связь матрицы циклов со свойством примитивности. Так же будет доказано следующее утверждение:

Утверждение 1 *Пусть $\mathcal{A} = (A_1, \cdots, A_k)$ – k-набор, где $A_s = (a^s_{ij}) \in M_n(\mathbb{B})$, и $D(\mathcal{A})$ – его соответствующий k-цветный ориентированный граф. Пусть $D(\mathcal{A})$ содержит петли всех цветов, и p – максимальная длина цикла, тогда экспонента не превосходит $p(n - p + 1) + k(p - 1)$.*

Литература

1. D. D. Olesky, B. Shader, P. van den Driessche, Exponents of tuples of nonnegative matrices, Linear Algebra and its Application, 356 (2002) 123-134.

2. Mahmud Akelbek, Steve Kirkland Primitive Digraphs with the Largest Scrambling Index, Linear Algebra and its Applications,(2009) 430 (4). pp. 1099-1110.

Слова благодарности

Я хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи, плодотворные обсуждения и постоянное внимание к моей работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта МД-2502.2012.1.