Секция «Математика и механика»

Формула распространяющихся волн для среды с памятью

Царицанский Анатолий Николаевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: tolyan777x@gmail.com

Формула распространяющихся волн $u = f(x-t) + g(x+t)$ является одной из фундаментальных форм представления общего решения одномерного волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$. В случае, когда это уравнение рассматривается не в прямоугольной области (например, для задач с подвижной границей или для задач в ограниченной области произвольной формы), она оказывается единственным инструментом анализа свойств решений. Аналог этой формулы для волнового уравнения в неоднородной среде $a(x)u_{tt} = (b(x)u_x)_x$ был представлен в [1]. В настоящей работе формула распространяющихся волн получена для уравнения в среде с памятью

$$\rho_s(z)u_{tt} = (\mu(z)u_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)u_t + \chi^2(z)\rho_l^3(z)u - \chi^3(z)\rho_l^4(z)\times$$
$$\times\int_0^t \exp\left(-\chi(z)\rho_l(z)(t-\tau)\right)u(\tau,z)\,d\tau \quad (1)$$

(вопрос о применимости метода распространяющихся волн для уравнения (1) был задан Х.Х.Имомназаровым в 2006 г.).

Введением дополнительной неизвестной функции

$$v(t,z) = \chi(z)\rho_l(z)\int_0^t \exp\left(-\chi(z)\rho_l(z)(t-\tau)\right)u(\tau,z)\,d\tau$$

уравнение (1) сводится к чисто дифференциальной системе, которая заменой пространственной переменной приводится к виду

$$\begin{cases} k(s)u_{tt} + \rho(s)v_{tt} = (k(s)u_s)_s, \\ v_t + \kappa(s)v = \kappa(s)u \end{cases} \quad (2)$$

с характеристиками $s \pm t = \mathrm{const}$, $s = \mathrm{const}$.

Теорема. *Общее решение системы (2) имеет вид*

$$\begin{cases} u(t,s) = k^{-1/2}(s)f^-(t,s) + k^{-1/2}(s)f^+(t,s), \\ v(t,s) = k^{-1/2}(s)f^0(t,s), \end{cases} \quad (3)$$

где $f^\alpha(t,s)$ ($\alpha \in \{+,-,0\}$) являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} f_t^- + f_s^- \& = \& \phi(s)f^- + (\phi(s)+\psi(s))f^+ - \phi(s)f^0, \\ f_t^+ - f_s^+ \& = \& (\phi(s)-\psi(s))f^- + \phi(s)f^+ - \phi(s)f^0, \\ f_t^0 \& = \& \kappa(s)f^- + \kappa(s)f^+ - \kappa(s)f^0. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) описывает перенос и перераспределение между собой трех волн $f^\alpha(t,s)$ – "левой ", "правой" и "прямой" (волна "памяти"). Коэффициенты $\phi(s)$, $\psi(s)$ и $\kappa(s)$ зависят только от свойств среды и выражаются через коэффициенты исходного уравнения.

Решения системы (4) выражаются через начальные волны $f_0^\alpha(s) = f^\alpha(0,s)$ формулами

$$f^\alpha(t,s) = \nu^\alpha(t,s) f_0^\alpha(s+\alpha t) + \sum_\beta \int_{s-t}^{s+t} \mu^{\alpha\beta}(\tau,t,s) f_0^\beta(\tau)\, d\tau, \tag{5}$$

где $\nu^\pm(t,s) = \exp\left(\int_{s\pm t}^{s} \phi(\tau)\, d\tau\right)$, $\nu^0(t,s) = \exp(-\kappa(s)t)$, а функции $\mu^{\alpha\beta}(\tau,t,s)$ (коэффициенты переноса волн) определяются из системы интегральных уравнений вольтерровского типа.

Литература

1. Боровских А.В. Метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 2004. вып. 24. С. 3-43.