Секция «Математика и механика»

О сложности укладки деревьев на плоскость

Ли Валентина Александровна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Алмалык, Узбекистан
E-mail: valentinalee@mail.ru

Множество $\mathcal{N}^2$ – пары (x, y), $x, y \in \mathbf{N}$, назовем координатной сеткой. Рассмотрим граф $G = \{V, W\}$, где V – множество вершин графа, а W – множество ребер.

Укладкой графа $G = \{V, W\}$ на координатную сетку будем называть отображение $\varphi : V \to \mathcal{N}^2$, сопоставляющее вершинам данного графа некоторые координаты $(x, y) \in \mathcal{N}^2$, причем разным вершинам соответствуют разные координаты.

Длиной ребра w графа G, при укладке φ будем называть величину $L(\varphi(w)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$, где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) координаты вершин v_1 и v_2, ребра w, соответственно.

Длина укладки φ графа G, при данной укладке φ есть $L(\varphi(G)) = \sum_{w \in W} L(\varphi(w))$.

Площадь укладки φ графа G есть площадь минимального прямоугольника, содержащего все вершины уложенного графа, при чем стороны прямоугольника параллельны осям координат сетки. Обозн. $S(\varphi(G))$.

Пусть $\mathcal{G}$– класс всевозможных графов.

Алгоритмом укладки графа $G \in \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ на координатную сетку будем называть отображение $\mathcal{A}$, задаваемое для всего подкласса $\mathcal{G}'$, которое каждому графу $G \in \mathcal{G}'$ сопоставляет определенную его укладку $\varphi_{\mathcal{A}}(G)$.

Длиной укладки $L_{\mathcal{A}}(G)$ графа $G \in \mathcal{G}'$ при заданном алгоритме $\mathcal{A}$ называется величина $L_{\mathcal{A}}(G) = L(\varphi_{\mathcal{A}}(G))$ и площадь укладки $S_{\mathcal{A}}(G)$ графа $G \in \mathcal{G}'$ при заданном алгоритме $\mathcal{A}$ есть $S_{\mathcal{A}}(G) = S(\varphi_{\mathcal{A}}(G))$ площадь минимального прямоугольника, в который укладывается граф G при заданной алгоритмом укладке $(\varphi_{\mathcal{A}}(G))$.

Рассмотрим подкласс графов – деревья. Введем обозначения:

- D_n^c– класс полных n-ичных деревьев.
- $D_{n,r}^c$– полное n-ичное дерево радиуса r из класса D_n^c.

Теорема 1. *Для класса полных бинарных деревьев произвольного радиуса* $r = 1, 2, \ldots$ *существует укладка* $\mathcal{A}$, *для которой справедливы оценки:* $N \le L_{\mathcal{A}}(D_{2,r}^c) < \frac{41}{32} \cdot N$; $N \le S_{\mathcal{A}}(D_{2,r}^c) < \frac{5}{4} \cdot N$, где N – количество ребер в дереве.

Теорема 2. *Для класса полных n-ичных деревьев произвольного радиуса* $r = 1, 2, \ldots$ *существует укладка* $\mathcal{A}$, *для которой справедливы оценки:*

если n – квадрат какого-то числа m, $n = m^2$: $N(\frac{\sqrt{1+2n}}{3} - 2) - \frac{\sqrt{1+2n}}{3} < L_{\mathcal{A}}(D_{n,r}^c) < N(\frac{\sqrt{1+2n}}{3} + \frac{5}{4}) + 3$; $N \le S_{\mathcal{A}}(D_{n,r}^c) \le 2N$

если n – любое: $N(\frac{\sqrt{1+2n}}{3} - 2) - \frac{\sqrt{1+2n}}{3}$.

Литература

1. Ли В. А. Порядок сложности укладки деревьев на плоскость. // Интеллектуальные системы, Т. 14, вып. 1-4, сс. 393-417, 2010.