Секция «Математика и механика»

Об алгебраических кривых фиксированной степени с особенностями заданного типа

Асташов Евгений Александрович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ast-ea@yandex.ru

Определение 1 *Пусть $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Поверхность $\{f = 0\}$ в $\mathbb{C}^n$ имеет в точке $a \in \mathbb{C}^n$* ***особенность типа*** $\mathcal{A}_k$, *если в некоторой окрестности этой точки существует локальная система координат $x_1, \ldots, x_n$, в которой функция имеет вид*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{k+1} + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Замечание 1 Тип особенности поверхности поверхности в данной точке определяется однозначно (см. [1]).

Рассматривается следующая задача. Пусть $P \in \mathbb{C}[x, y]$ — многочлен от двух переменных с комплексными коэффициентами фиксированной степени $\deg P = d$. Каков максимальный порядок $k = k(d)$ особенности типа $\mathcal{A}_k$, которую может иметь кривая $\{P(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$?

Частичный ответ на этот вопрос имеется в работе [2]. В ней доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1 *Пусть $k(d)$ — максимальное из натуральных чисел k, для которых существует плоская кривая степени dс особенностью типа $\mathcal{A}_k$. Тогда*

$$k(d) \leq (d-1)^2 - \left[\frac{d}{2}\right] \cdot \left(\left[\frac{d}{2}\right] - 1\right).$$

Теорема 2 *Для любого $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существует плоская кривая степени $28s + 9$ с особенностью типа $\mathcal{A}_k$, где $k = 420s^2 + 269s + 42$.*

Теоремы 1 и 2 дают, соответственно, верхнюю и нижнюю оценку величины $k(d)$ при больших d, а именно:

Следствие 1

$$\varlimsup_{d\to\infty} \frac{k(d)}{d^2} \leq \frac{3}{4}.$$

Следствие 2

$$\varliminf_{d\to\infty} \frac{k(d)}{d^2} \geq \frac{15}{28}.$$

Мы усилим результат следствия 2, доказав следующее утверждение:

Теорема 3

$$\varliminf_{d\to\infty} \frac{k(d)}{d^2} \geq \frac{112}{209} > \frac{15}{28}.$$

Кроме того, будет указан общий метод, при помощи которого были доказаны теоремы 2 и 3 и который может быть использован для дальнейшего улучшения их результатов. Имеется следующая

Гипотеза 1

$$\varliminf_{d\to\infty} \frac{k(d)}{d^2} \geq 4 - 2\sqrt{3}.$$

Литература

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений, т. 2. М.: Наука, 1983.

2. Гусейн-Заде С. М., Нехорошев Н. Н. Об особенностях типа $\mathcal{A}_k$ на плоских кривых фиксированной степени. // Функциональный анализ и его приложения., т. 34, вып. 3. М., 2000. С. 69-70.