Секция «Математика и механика»

Целочисленные решетки переменных действие некоторых интегрируемых гамильтоновых систем.

Кантонистова Елена Олеговна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: kysin@rambler.ru

В последние годы изучение гамильтоновых систем становится все более актуальным, но существует еще много нерешенных задач в этой ветви математики, поэтому исследования в данной области вполне обоснованны. В данной работе применены вычисления на компьютере, с помощью которых получены картинки решеток переменных действия некоторых интегрируемых гамильтоновых систем.

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему (M^{2n}, ω, H) с n степенями свободы. Пусть $F_1, \dots, F_n$ — ее первые интегралы, $F_1 = H$. Пусть $\Phi = (F_1, \dots, F_n)$: $M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ — отображение момента, Σ — бифуркационная диаграмма отображения момента. Согласно теореме Лиувилля, в окрестности компактного связного регулярного множества уровня $T_\xi = \Phi^{-1}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, существуют канонические переменные ($I_1, \dots, I_n, \varphi_1 \mod 2\pi, \dots, \varphi_n \mod 2\pi$), называемые переменными действие-угол, причем переменные действия $I_1, \dots, I_n$ являются функциями от первых интегралов.

Первым этапом данной работы стал поиск и вычисление явных формул переменных действия некоторых интегрируемых гамильтоновых систем, в частности, для обобщенного случая Лагранжа в движении твердого тела, для системы "сферический маятник", а также для комплексных гамильтоновых систем, заданных полиномами вида $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, где $P_n(w)$ — многочлен от переменной w степени n, где $n = 3, 4$.

Определение 1. Множество точек $\Phi(M^{2n}) \backslash \Sigma \subset \mathbb{R}^n$, образованных пересечением n гиперповерхностей уровня функций $I_1 = I_1(\xi), \dots, I_n = I_n(\xi)$ с целыми значениями, назовем целочисленной решеткой $\Re$ переменных действия(далее просто решеткой).

На втором этапе, зная явные формулы для переменных действия, строились решетки для исследуемых случаев.

Определение 2. Осуществим однократный обход по замкнутому пути вокруг внутренней особой точки. Начальный базис решетки e_1, e_2 и конечный базис e'_1, e'_2 связаны невырожденным линейным преобразованием с матрицей M. Эта матрица называется матрицей монодромии системы.

В результате третьего этапа работы был создан алгоритм обхода вокруг внутренних особых точек исследуемых систем и подсчитаны соответствующие матрицы монодромии.

Литература

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Интегрируемые гамильтоновы системы, Издательский дом "Удмуртский университет 1999.

2. Zhilinskii B., Hamiltonian Monodromy as Lattice Defect, European project MASIE.

3. Орел О.Е., Такахаши Ш., Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева-Чаплыгина методами компьютерного анализа, Математический сборник,

4. Том 187, 1, гл.4.

5. Лепский Т.А., Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с

6. комплексным полиномиальным гамильтонианом малой степени, Математический Сборник, 2010, 10.

7. Cushman R.H., Duistermaat J.J., The quantum mechanical spherical pendulum, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Volume 19, Number 2 (1988), 475–479.

8. Cushman R.H., Bates L.M., Global Aspects of Classical Integrable Systems, Birkhauser Basel, 1997.

Слова благодарности

Автор благодарит А.Т.Фоменко, Е.А.Кудрявцеву и А.А.Ошемкова за огромную помощь в работе, ценные замечания и доброжелательное отношение к автору.