Секция «Математика и механика»

Интерактивное учебное пособие по курсу "Уравнения математической физики"

Глазов Николай Олегович
Аспирант
Московский государсвенный университет экономики, статистики и информатики, Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, Москва, Россия
E-mail: glazov_n_o@mail.ru

Широкий класс физических процессов (например, колебания струны или мембраны, распространение тепла в стержне), описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Такие уравнения называются уравнениями математической физики. Однако точное решение этих уравнений возможно лишь в некоторых элементарных случаях и сопряжено с большими трудностями и громоздкими выкладками. К тому же это решение качественно зависит от граничных и начальных условий. Для анализа таких решений приходится прибегать к помощи специализированных математических компьютерных программ, которые позволяют не только находить решения, но и в автоматическом режиме отслеживать их изменения, обусловленные вариациями граничных и начальных условий.

Исследование качественных свойств решений дифференциальных уравнений в частных производных – это трудоёмкий процесс, связанный с большими временными затратами. Но в учебном процессе, особенно для дистанционного и заочного образования, необходимы наглядные пособия, которые помогут студентам быстрее и качественнее освоить требуемый материал. Особенно важны такие пособия при обучении студентов решению дифференциальных уравнений и исследованию их качественных свойств, так как данный материал является сложным для понимания.

Предлагаемый электронный учебник создан на основе курса лекций [1] и практических занятий [2], предназначенных для студентов МЭСИ, обучающихся по специальности «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», и снабжён средствами визуализации для наглядного представления решений основных краевых задач математической физики.

Перед разработкой данного пособия был проведён анализ уже существующего математического программного обеспечения. Для сравнения были выбраны две программы математического моделирования: Mathematica (версия 5.2) и wxMaxima (версия 0.8.1). Mathematica – коммерческая система компьютерной алгебры компании Wolfram Research. wxMaxima – графическая надстройка свободной системы компьютерной алгебры Maxima. Оба приложения содержат множество функций, как для аналитических преобразований, так и для численных расчётов, а также поддерживают работу с графикой и звуком, включая построение двух- и трёхмерных графиков функций и анимацию [3],[4]. Стоит отметить, что всецело переложить на встроенные команды Mathematica или wxMaxima процесс поиска решения уравнений в частных производных не удастся, поскольку эти программы не имеют встроенных математических пакетов для решения задач математической физики, поэтому поиск этого решения подразумевает, что пользователь обладает определённой математической подготовкой по дифференциальным уравнениям в частных производных и знает систему команд используемого приложения (хотя бы в минимальном объёме). К недостаткам этих программ можно отнести и тот факт, что на решение, например, задачи о колебаниях мембраны и построения анимированного графика уходит по несколько минут (около 5 минут при низком качестве графики), тогда как для рассмотрения нескольких характерных примеров желательно получать готовый результат почти мгновенно.

Таким образом, пакеты Mathematica и wxMaxima в основном предназначены для научно-исследовательской деятельности специалистов. Они предоставляют широчайшие возможности, но для их использования необходимо долгое изучение, что не всегда возможно в рамках вводного учебного курса. Если же программа решает более узкую задачу, то пользователи смогут с ней работать, не затрачивая много времени на изучение. Поэтому на кафедре Высшей математики МЭСИ было разработано программное обеспечение MathPhys для демонстрации решений уравнений математической физики, которое обладает дружественным интерфейсом и используется преподавателями и студентами в учебном процессе.

Программа MathPhys предназначена для наглядной демонстрации решений ряда задач математической физики. В программе реализован максимально простой и удобный интерфейс с целью облегчения восприятия информации. Каждый раздел учебного пособия снабжён демонстрационными примерами, наглядно иллюстрирующими изученный материал. Пользователь выбирает тип решаемой задачи, вводит необходимые физические параметры, задаёт начальные и граничные условия. Используя эти данные, программа строит график решения в начальный момент времени. Если полученное решение зависит от времени, то программа даёт возможность видеть, как изменяется характер решения с течением времени. Процесс можно в любой момент приостановить, полностью прекратить, увеличить или уменьшить темп, зафиксировать определённый момент времени. Для удобства отображения предусмотрены средства для гибкой работы с графиком. Графиком можно управлять с помощью клавиатуры или мыши не прерывая демонстрации: повернуть, переместить, масштабировать, растянуть или сжать график по соответствующим осям координат, изменить цвет.

Ниже представлено описание некоторых задач, для решения которых используется программа MathPhys:

Колебания струны

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g\,(t, x) \tag{1}$$

моделирует колебания однородной гибкой струны длиной L с линейной плотностью ρ, натянутой силой растяжения T между фиксированными точками $x = 0$ и $x = L$ ($a^2 = \frac{T}{\rho}$) под действием внешней вертикальной силы $g(t, x)$. Струна совершает поперечные колебания около её положения равновесия; $u(t, x)$ есть отклонение точки x струны от положения равновесия в момент времени t. Известны начальное отклонение струны: $u(0, x) = f(x)$ и начальная скорость струны: $u_t(0, x) = F(x)$, а также условия на концах струны: $u(t, 0) = h_0(t); u(t, L) = h_1(t)$ или $u_x(t, 0) = h_0(t); u_x(t, L) = h_1(t)$.

Решение задачи о колебаниях струны, полученное с помощью программы MathPhys, представляет собой анимированный график, у которого по оси абсцисс откладываются координаты точек струны, а по оси ординат – отклонение струны от положения равновесия в этих точках. Различными цветами показаны составляющие прямой и обратной бегущей волны. Суперпозиция этих волн представляет собой профиль колеблющейся струны (на график выделяется красным цветом). На графике хорошо видно как струна отражается от своих левого ($x = 0$) и правого конца ($x = L$).

Колебания мембраны

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) \tag{2}$$

моделирует поперечные колебания однородной гибкой круглой мембраны радиуса R с поверхностной плотностью ρ, на которую действует сила растяжения T таким способом, что её смещение u зависит только от времени t и расстояние r от её центра. Граница мембраны фиксирована, а начальное отклонение и начальная скорость мембраны задаётся формулами $u(0, r) = f(r)$ и $u_t(0, r) = F(r)$ соответственно.

На рис. 1 приведены графики решений нескольких задач о колебаниях мембраны, полученные с помощью программы MathPhys (примеры взяты из [5] и [6]).

Нагретый стержень

Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q\,(t, x) \tag{3}$$

моделирует изменение температуры $u(t, x)$ в нагретом стержне длиной L, расположенном вдоль оси x в зависимости от положения x и времени t. Стержень имеет постоянное поперечное сечение перпендикулярное к оси, причём стержень сделан из однородного материала. Поперечное сечение стержня настолько мало, что u является постоянной во всём поперечном сечении и что боковая поверхность стержня изолирована так, что поток теплоты через неё отсутствует ($q = 0$). Предполагается, что тепло может течь подобно жидкости от более тёплых частей тела к более холодным. Значение параметра a зависит от коэффициента теплопроводности материала стержня k, удельной теплоёмкости c и плотности ρ стержня и выражается по формуле: $a^2 = \frac{k}{c\rho}$. Кроме того, известно начальное распределение температуры в стержне: $u(0, x) = f(x)$ и значение температуры на обоих концах стержня: $u(t, 0) = h_0(t); u(t, L) = h_1(t)$. (Вместо того, чтобы установить фиксированную температуру, можно изолировать оба конца стержня: $u_x(t, 0) = h_0(t); u_x(t, L) = h_1(t)$ или разрешить теплообмен между стержнем и окружающей средой).

Решение задачи о распространении тепла в стержне, полученное с помощью программы MathPhys, представляет собой анимированный график, у которого по оси абсцисс откладываются координаты точек стержня, а по оси ординат – температура стержня в этих точках. Программа выделяет цветом на графике участки с различной температурой (чем выше температура, тем краснее участок).

Использование программы MathPhys в учебном процессе оказывает студентам существенную помощь. Они учатся не только решать дифференциальные уравнения в частных производных, но и анализировать их решения, а применение данного приложения даёт возможность изучить большее число примеров. Программа особенно полезна для студентов заочной и дистанционной форм обучения. Класс решаемых программой MathPhys задач в дальнейшем предполагается расширить.

Литература

1. Асташова И.В., Никишкин В.А. Практикум по курсу "Дифференциальные уравнения". МЭСИ, М., 2010.
2. Асташова И.В., Никишкин В.А. "Дифференциальные уравнения" (часть 2). МЭСИ, М., 2004.
3. Васильев А.Н. Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач. КОРОНА-ВЕК, СПб., 2008.
4. Ильина В.А., Силаев П.К. Система аналитических вычислений MAXIMA для физиков-теоретиков. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск, 2009.
5. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. ФИЗМАТЛИТ, М., 2004.
6. Эдвардс Ч.Г., Пенни Д.Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. Вильямс, М., 2008.

Иллюстрации

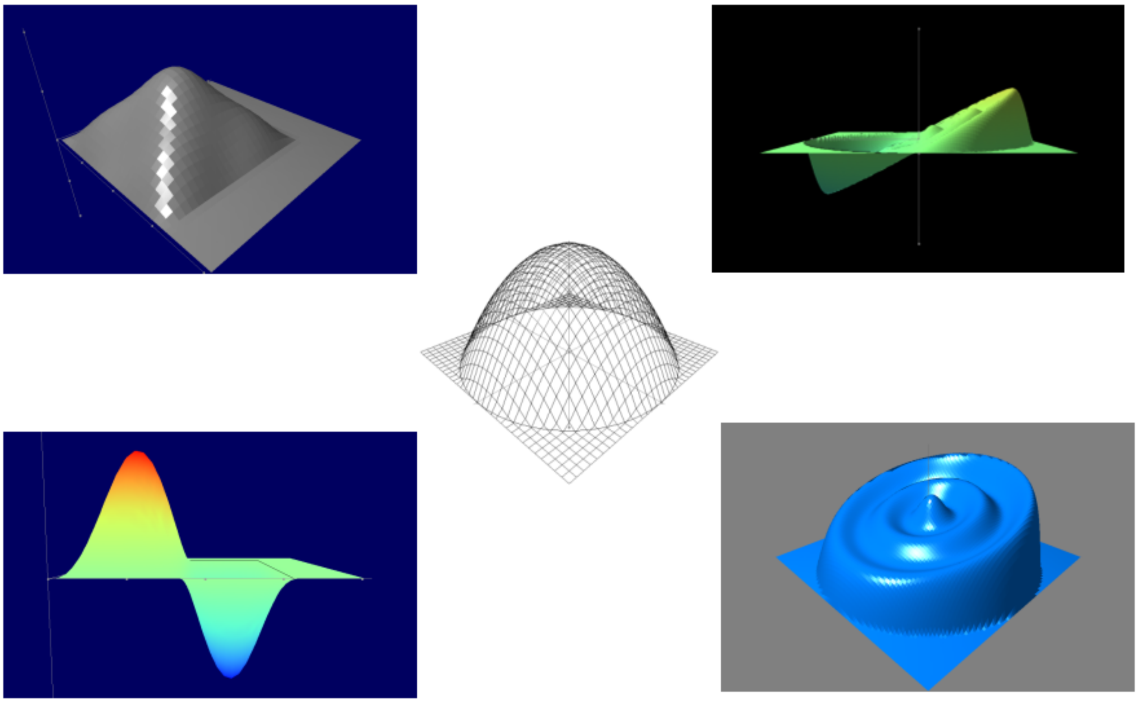

Рис. 1: Решения задач о колебаниях мембраны, полученные с помощью программы MathPhys