Секция «Математика и механика»

Одно свойство ядерных операторов

Антропов Александр Владимирович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: bigant146@mail.ru

Оператор A на сепарабельном гильбертовом называется ядерным или оператором со следом, если существует такой ортонормированный базис $\{e_i\}$, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i\| < \infty. \qquad (1)$$

Существуют и другие, эквивалентные, определения; например, последнее эквивалентно тому, что оператор $T = (A^*A)^{1/4}$ является оператором Гильберта—Шмидта, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 < \infty.$$

Хорошо известно, что сходимость последнего ряда не зависит от выбора ортонормированного базиса, тогда как (1) может зависеть от $\{e_i\}$: известны примеры ядерных операторов A, таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} \|A\psi_i\| = \infty$ для некоторого ортонормированного базиса $\{\psi_i\}$.

Естественно, возникает вопрос о существовании ядерного оператора A для которого (1) было бы верно для всякого ортонормированного базиса $\{e_i\}$.

Однако все такие операторы описываются тривиально.

Теорема. Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Тогда не существует ненулевого ограниченного оператора A такого, что (1) выполняется для любого ортонормированного базиса $\{e_i\}$.

Еще одно, эквивалентное, определение ядерного оператора состоит в том, что его s-числа принадлежат l^1. Но тогда возникает еще один вопрос. Хорошо известно, что l^1 имеет существенные отличия от произвольного l^p, $p > 1$. Проявится ли это в данном случае? Оказывается, нет.

Теорема. Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство и $p \in [1, 2)$. Тогда не существует ненулевого ограниченного оператора A такого, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i\|^p < \infty. \qquad (2)$$

выполняется для любого ортонормированного базиса $\{e_i\}$.

Литература

1. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2009