Секция «Математика и механика»

Существование решений нелинейных параболических уравнений для мер

Манита Оксана Анатольевна

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: oxana.manita@gmail.com

Рассмотрим задачу Коши $\partial_t \mu_t = L^*_\mu \mu$, $\mu_0 = \nu$ для борелевской меры μ на полосе $\mathbb{R}^d \times [0,\tau]$, заданной семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ (т.е. $d\mu = d\mu_t dt$), где

$$L_\mu u = a^{ij}(x,t,\mu)\partial_{x_i x_j} u + b^i(x,t,\mu)\partial_{x_i} u.$$

Пусть $\tau_0 > 0$ и $V(x) \geq 0$. Для всякой $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$ и всякого $\tau \in (0,\tau_0]$ положим

$$M_{\tau,\alpha}(V) = \{\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]} : \mu_t \geq 0, \quad \mu_t(\mathbb{R}^d) = 1, \quad \int V(x)\, d\mu_t \leq \alpha(t)\}$$

(H1) Задана функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, для которой $V(x) > 0$, $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$, отображения Λ_1 и Λ_2 пространства $C^+([0,\tau_0])$ в $C^+([0,\tau_0])$ такие, что $\forall \tau \in (0,\tau_0]$ и $\forall \alpha \in C^+([0,\tau_0])$ для каждой μ из $M_{\tau,\alpha} = M_{\tau,\alpha}(V)$ заданы функции $(x,t) \mapsto a^{ij}(x,t,\mu)$ и $(x,t) \mapsto b^i(x,t,\mu)$, причем $\forall \mu$ из $M_{\tau,\alpha}$ они интрегрируемы относительно μ и $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tau]$ выполняется неравенство

$$L_\mu V(x,t) \leq \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t) V(x).$$

(H2) Для всяких $\tau \in (0,\tau_0]$, $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$, $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ функции $a^{ij}(x,t,\sigma)$ и $b^i(x,t,\sigma)$ являются борелевскими по t при фиксированном x и равномерно по σ и t ограниченными и равностепенно по σ и t непрерывными по x на всяком замкнутом шаре $U \subset \mathbb{R}^d$. Кроме того, если для $\mu^n \in M_{\tau,\alpha}$ последовательности μ^n_t слабо сходятся к μ_t, где $\mu \in M_{\tau,\alpha}$, то $\lim_{n\to\infty} a^{ij}(x,t,\mu^n) = a^{ij}(x,t,\mu)$ и $\lim_{n\to\infty} b^i(x,t,\mu^n) = b^i(x,t,\mu)$.

(H3) Для всякого $\tau \in (0,\tau_0]$, $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$ и меры $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ матрица $A = (a^{ij}(x,t,\sigma))_{1\leq i,j\leq d}$ является симметричной и неотрицательно определенной.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (H1)-(H3) *и* $V \in L^1(\nu)$. *Тогда:*

(i) *Существует* $\tau \in (0,\tau_0]$ *такое, что задача Коши на* $[0,\tau]$ *имеет решение* μ, *заданное вероятностными мерами* $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$, *причем если отображения* Λ_1 *и* Λ_2 *являются константами, то* $\tau = \tau_0$.

(ii) *Если* $\Lambda_1[\alpha] = 0$ *и* $\Lambda_2[\alpha](t) = G(\alpha(t))$, *где* G *– строго возрастающая непрерывная положительная функция на* $[0,+\infty)$, *то задача Коши имеет решение на всяком отрезке* $[0,\tau]$, *где* $\tau \in (0,\tau_0]$, $T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{uG(u)}\, du, \quad u_0 = \int V(x)\, d\nu.$

Кроме того, в (i) *и* (ii) *для решения имеется оценка* $\sup_{t\in[0,\tau]} \int V(x) d\mu_t < \infty.$

(iii) *Если для некоторых* $C_1, C_2 > 0$ *выполнено* $|\sqrt{A(x,t,\mu)}\nabla V(x)|^2 \leq C_1 + C_2 V(x)$ *и* $L_\mu V \geq VG(\int V d\mu_t)$, *где* G *- как в п.* (ii), *то на отрезке* $[0,\tau]$ *с* $\tau \geq T$, *где* T *определяется* *также, как и в пункте* (ii), *задача Коши не имеет решения в классе мер* $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T]}$, *для которых* μ_t *– вероятностные меры и* $\sup\limits_{t\in[0,T]} \int V(x)\,d\mu_t < \infty$.

Стоит отметить, что исследованию нелинейных параболических уравнений для мер посвящены, в частности, работы [1], [2], [3] и [4].

Данная работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00518-а, 11-01-00348-а, 11-01-12018-офи-м-2011, 12-01-92103-ЯФа, грантом Президента РФ МК-3674.2011.1.

Литература

1. Богачев В.И., Рёкнер М., Шапошников С.В. Нелинейные эволюционные и транспортные уравнения для вероятностных мер // Доклады РАН, 2009, т. 429, N 1. С. 7–11.

2. Добрушин Р.Л. Уравнения Власова // Функц. Анализ. и его приложения, 1979, т. 13, N 2. С. 48–58.

3. Козлов В.В. Обобщенное кинетическое уравнение Власова // Успехи мат. наук, 2008, т. 63, вып. 4. С. 93—130.

4. Carrillo J.A., Difrancesco M., Figalli A., Laurent T., Slepcev D. Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for non-local interaction equations // Duke Math. J., 2011, v. 156, N. 2. P. 229–271.

Слова благодарности

Автор выражает признательность д.ф-м.н. В.И. Богачеву и С.В. Шапошникову за плодотворные обсуждения и ценные замечания.