Секция «Математика и механика»

О вложении класса функций с доминирующим смешанным модулем гладкости.

Исмагилов Тимур Фаритович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: tismagilov@mail.ru

Хорошо известны классы функций Никольского $H_{\mathbf{p}}^{\alpha_1\alpha_2}$ и $SH_{\mathbf{p}}^{\alpha_1\alpha_2}$ и теоремы вложения для них(см. [1], [2]). В этой работе вводится класс функций $SH(\mathbf{p},\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ с доминирующим смешанным модулем гладкости, являющийся обобщением этих классов и для него приводится теорема вложения.

Будем писать, что $f\in L_{\mathbf{p}}$, если $f(x_1,x_2)$ - измеримая на $[0,2\pi]^2$ функция двух переменных, 2π - периодическая по каждому из них и такая, что:

$||f||_{\mathbf{p}}\le C<\infty$, где $\mathbf{p}=\{p_1,p_2\}$, $1\le p_i\le\infty$, $i=1,2$, $\quad ||f||_{\mathbf{p}}=||\{||f||_{p_1}\}||_{p_2}$,

$||\mathrm{F}||_{p_i}=\left(\int\limits_0^{2\pi}|F|^{p_i}dx_i\right)^{1/p_i}$, если $1\le p_i\le\infty$, $||F||_{p_i}=\sup\underset{x_i\in[0,2\pi]}{vrai}|F|$, если $p_i=\infty$.

Обозначим:

- *модуль гладкости* функции $f(x_1,x_2)$ по переменной x_1:

$$\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{\mathbf{p}}=\sup_{|h_1|\le\delta_1}||\sum_{v_1=0}^{k_1}(-1)^{v_1}C_{k_1}^{v_1}f(x_1+v_1h_1,x_2)||_{\mathbf{p}},$$

- *модуль гладкости* функции $f(x_1,x_2)$ по переменной x_2:

$$\omega_{k_2}(f,\delta_2)_{\mathbf{p}}=\sup_{|h_2|\le\delta_2}||\sum_{v_2=0}^{k_2}(-1)^{v_2}C_{k_2}^{v_2}f(x_1,x_2+v_2h_2)||_{\mathbf{p}},$$

- *смешанный модуль гладкости* функции $f(x_1,x_2)$:

$$\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\mathbf{p}}=$$
$$=\sup_{|h_1|\le\delta_1,|h_2|\le\delta_2}||\sum_{v_1=0}^{k_1}(-1)^{v_1}C_{k_1}^{\nu_1}\sum_{v_2=0}^{k_2}(-1)^{v_2}C_{k_2}^{\nu_2}f(x_1+v_1h_1,x_2+v_2h_2)||_{\mathbf{p}}.$$

Определим *класс функций* $SH(\mathbf{p},\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$.

Будем писать $f\in SH(\mathbf{p},\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, если $\mathbf{p}=\{p_1,p_2\},\ 1\le p_i\le\infty,\ \alpha_i>0,\ \beta_i>0$, $i=1,2$ и:

1. $f\in L_{\mathbf{p}}$
2. $\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{\mathbf{p}}\le m_1\delta_1^{\alpha_1},\forall\delta_1\in(0,1],\ k_1=[\alpha_1]+1,$
3. $\omega_{k_2}(f,\delta_2)_{\mathbf{p}}\le m_2\delta_2^{\alpha_2},\forall\delta_2\in(0,1],\ k_2=[\alpha_2]+1,$
4. $\omega_{k_3k_4}(f,\delta_1,\delta_2)_{\mathbf{p}}\le m_3\delta_1^{\beta_1}\delta_2^{\beta_2},\forall\delta_1\in(0,1],\forall\delta_2\in(0,1],k_3=[\beta_1]+1,k_4=[\beta_2]+1,$

где m_1, m_2, m_3 - константы, не зависящие от f, δ_1 и δ_2.

Класс $SH(\mathbf{p}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ совпадает с классом $H_{\mathbf{p}}^{\alpha_1 \alpha_2}$, если $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1$.

Класс $SH(\mathbf{p}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ совпадает с классом $SH_{\mathbf{p}}^{\alpha_1 \alpha_2}$, если $\beta_1 = \alpha_1$ и $\beta_2 = \alpha_2$.

Теорема.Если $f \in SH\left(\mathbf{p}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\right),\ \mathbf{p} = \{p_1, p_2\},\ \mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$, $1 \le p_1 < q_1 \le \infty,\ 1 \le p_2 < q_2 \le \infty$,

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{p_1} - \tfrac{1}{q_1} < \beta_1 \le \alpha_1,\ \tfrac{1}{p_2} - \tfrac{1}{q_2} < \beta_2 \le \alpha_2,\ \tfrac{\beta_1}{\alpha_1} + \tfrac{\beta_2}{\alpha_2} \ge 1, \\
\vartheta_1 = 1 - \left(\tfrac{1}{\alpha_1}\left(\tfrac{1}{p_1} - \tfrac{1}{q_1}\right) + \tfrac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}\left(\tfrac{1}{p_2} - \tfrac{1}{q_2}\right)\right) > 0, \\
\vartheta_2 = 1 - \left(\tfrac{1}{\alpha_2}\left(\tfrac{1}{p_2} - \tfrac{1}{q_2}\right) + \tfrac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}\left(\tfrac{1}{p_1} - \tfrac{1}{q_1}\right)\right) > 0, \\
\alpha_1^* = \alpha_1 \vartheta_1,\ \alpha_2^* = \alpha_2 \vartheta_2,\ \beta_1^* = \beta_1 - \left(\tfrac{1}{p_1} - \tfrac{1}{q_1}\right),\ \beta_2^* = \beta_2 - \left(\tfrac{1}{p_2} - \tfrac{1}{q_2}\right),
\end{gathered}$$

то $f \in SH\left(\mathbf{q}, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*\right)$.
Отметим, что теорема содержит в себе теоремы вложения для классов Никольского.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-979-2012-1).

Литература

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., Наука, 1977.

2. Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гёльдера// Сиб. матем. журнал, 1963. т.4. No. 6. С. 1342-1364.