Секция «Математика и механика»

О дискретном спектре периодических операторов с разбегающимися возмущениями

Головина Анастасия Михайловна
Аспирант
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Физико-математический факультет, Уфа, Россия
E-mail: nastya_gm@mail.ru

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ - произвольная периодическая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно сдвигов по дискретным параметрам $X_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots k$, стремящимся к бесконечности, $\mathcal{L}_i$ - некоторые ограниченные симметричные операторы, действующие из пространства $W_2^m(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функции $\xi_i(x), \eta_i(x) \in C^m(\overline{\Omega})$, $\xi_i(x), \eta_i(x) \geqslant 0$, удовлетворяющие условиям:

1. Существует функция $\varphi \in C^m(\overline{\Omega})$ такая, что $|\xi_i| \leqslant C_1\varphi$ и $\left|\partial^\alpha \varphi\right| \leqslant C_2\left|\varphi\right|$, где C_1, C_2 – некоторые константы, не зависящие от x, а α – мультииндекс, $|\alpha| \leqslant m$;

2. Функции φ, η_i и их производные до порядка m убывают на бесконечности.

Введём в рассмотрение самосопряжённый оператор $\mathcal{H}_0 : W_2^m(\Omega) \to L_2(\Omega)$, удовлетворяющий требованиям:

3. Для любого $u \in W_2^m(\Omega)$ выполнено неравенство $\|u\|_{W_2^m(\Omega)} \leqslant C(\|\mathcal{H}_0 u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$, где C – не зависящая от u константа.

4. Верно равенство $\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{H}_0\mathcal{S}(X_i) = \mathcal{H}_0$, где $\mathcal{S}(X_i)$ - оператор сдвига, действующий по правилу $(\mathcal{S}(X_i)u)(\cdot) = u(\cdot - X_i)$.

5. Справедлива оценка $\|(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^{\varepsilon} - \mathcal{H}_0)u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varsigma(\varepsilon)\|u\|_{L_2(\Omega)}$, где $\varsigma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и не зависит от u.

В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим операторы $\mathcal{H}_X := \mathcal{H}_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\xi_i\mathcal{L}_i\eta_i\mathcal{S}(X_i)$, $\mathcal{H}_i := \mathcal{H}_0 + \xi_i\mathcal{L}_i\eta_i$ с областью определения $W_2^m(\Omega)$. Будем предполагать, что операторы $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \dots k$ и оператор $\mathcal{H}_X$ являются самосопряжёнными. Здесь и далее под символом X будем понимать совокупность всевозможных $X = X_j - X_s$ при $j \neq s$. Основной результат работы заключается в следующем:

Если λ_0 является простым изолированным собственным значением одного из операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \dots k$, например оператора $\mathcal{H}_1$, и не принадлежит спектрам операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \dots k$, то существует единственное собственное значение возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, которое сходится к λ_0 при $X \to \infty$. Кроме того, данное собственное значение возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ также является простым и изолированным и может быть представлено в виде равномерно сходящегося по X ряда $\lambda_X = \lambda_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j(X)$. Данный ряд является асимптотическим и его коэффициенты удовлетворяют следующей оценке $|\lambda_j(X)| \leqslant C_j\beta^{2j}(X)$, $\beta(X) = \max\limits_{j\neq s} \max\limits_{|\alpha|\leqslant m} \max\limits_{\overline{\Omega}} |\partial^\alpha \varphi^\varepsilon(\cdot + X)\eta_j|$, где C_j – некоторые константы, ε – фиксированное достаточно малое число, α – мультииндекс.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность Борисову Д.И. за постановку задачи. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (10-01-00118) и ФЦП (02.740.11.0612).