Секция «Математика и механика»

Задача о равновесии моментно-упругого прямоугольника

Слепцов Иннокентий Степанович
Студент
СВФУ - Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Физико-технический институт, Якутск, Россия
E-mail: k.sleptsov@mail.ru

В моментной (микрополярной) теории упругости, известны немного работ с точными аналитическими решениями задач, особенно в случае областей с конечными размерами. В данной работе развивается метод аналитического решения задач о равновесии моментно-упругого прямоугольника.

Рассматриваем случай плоской деформации в моментной теории упругости [1], когда перемещение $\mathbf{u}$ и вращение ω имеют вид:

$$\mathbf{u} = u_x(x,y)\mathbf{i} + u_y(x,y)\mathbf{j}$$

$$\omega = \omega(x,y)\mathbf{k},$$

Искомая задача задача о равновесии моментно-упругого прямоугольника имеет вид:

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu-\alpha)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + 2\alpha\nabla\times\omega = 0, \mathbf{r}\epsilon(0<x<a, 0<y<b), \\ (\upsilon+\beta)\Delta\omega + 2\alpha\nabla\times\mathbf{u} - 4\alpha\omega = 0, \\ \sigma_{xy}|_{x=a,0} = \widetilde{\sigma}_{x\pm}(y), u_x|_{x=a,0} = \widetilde{u}_{x\pm}(x), \omega|_{x=a,0} = \widetilde{\omega}_{x\pm}(y), \\ \sigma_{yx}|_{y=b,0} = \widetilde{\sigma}_{y\pm}(x), u_y|_{y=b,0} = \widetilde{u}_{y\pm}(y), \omega|_{y=b,0} = \widetilde{\omega}_{y\pm}(x), \end{cases}$$

здесь $\lambda, \alpha, \mu, \beta$ - упругие постоянные. Краевые условия означают, что на границе области заданы нормальные компоненты напряжений, касательные компоненты вектора перемещения и моментные напряжения. Предлагаемый метод решения состоит в том, что рассматриваемая задача, при достаточной гладкости и согласованности краевых функций, сводится к последовательному решению краевых задач для уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца [2-4].

В частном случае поставленной задачи, когда

$$u_x|_{x=0} = \widetilde{u}_{x-} = \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right),$$

а все остальные краевые функции равны нулю, все выкладки проведены до конца и получено решение в замкнутой форме. Компоненты векторов вращения и перемещений имеют следующий вид:

$$\omega = \frac{\pi}{\mu b}\left[\frac{Sh\frac{2\pi}{b}(a-x)}{Sh\frac{2\pi}{b}a} - \frac{Sh\theta(a-x)}{Sh\theta a}\right]\sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$$

$$u_x = \left\{\left\{1 - \frac{\pi^2 B(\alpha+\mu)}{b\mu^2} - \left[\frac{2\pi\mu(\lambda+\mu-\alpha)}{b(\mu+\alpha)(\lambda+2\mu)} + \frac{\alpha}{\mu b}\right] aCh\left(\frac{2\pi}{b}a\right)\right\} \times$$

$$\times\frac{Sh\frac{2\pi}{b}(a-x)}{Sh\frac{2\pi}{b}a}+\frac{\pi^2B(\alpha+\mu)}{b\mu^2}\frac{Sh\theta(a-x)}{Sh\theta a}+$$

$$+\left[\frac{2\pi\mu(\lambda+\mu-\alpha)}{b(\mu+\alpha)(\lambda+2\mu)}+\frac{\alpha}{\mu b}\right]\frac{(a-x)Ch\left(\frac{2\pi}{b}(a-x)\right)}{Sh\left(\frac{2\pi}{b}a\right)}\Bigg]\cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$$

$$u_y=\left\{\left\{\frac{\alpha-\mu}{\alpha+\mu}-\frac{\theta^2B(\alpha+\mu)}{4\mu^2}-\left[\frac{\alpha}{\mu b}-\frac{2\mu(\lambda+\mu-\alpha)}{(\alpha+\mu)(\lambda+2\mu)}\right]\left[\frac{b}{2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\pi aCh\left(\frac{2\pi}{b}a\right)\right]\right\}\frac{Ch\left[\frac{2\pi}{b}(a-x)\right]}{Sh\left(\frac{2\pi}{b}a\right)}+\frac{\pi\theta B(\alpha+\mu)}{2b\mu^2b}\frac{Sh\theta(a-x)}{Sh\theta a}+$$

$$\left.+\pi\left[\frac{\alpha}{\mu b}-\frac{2\mu(\lambda+\mu-\alpha)}{(\alpha+\mu)(\lambda+2\mu)}\right]\frac{(a-x)Sh\left(\frac{2\pi}{b}(a-x)\right)}{Sh\left(\frac{2\pi}{b}\right)a}\right\}\sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$$

Компоненты напряжений вычисляются по закону Гука [1].

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 367 с.

2. Григорьев Ю.М. Аналитическое решение задачи о равновесии прямоугольника в моментной теории упругости // Вестник ЯГУ. – 2007. – Т.4.- № 4. – С. 19-26.

3. Григорьев Ю.М. Аналитическое решение некоторых основных задач классической и моментной теорий упругости для прямоугольного параллелепипеда // Моделирование в механике.-Т.6(23).- №4.- Новосиб-к, 1992.- С. 21-26.

4. Хомасуридзе Н.Г. О решении трехмерных граничных задач безмоментной и моментной теорий упругости / Исследование некоторых уравнений математической физики. – 1972. – Вып. 1. – С. 123-147. (Тбилиси: Изд. Тбил. гос. ун-та).

Слова благодарности

Хочу поблагодарить своего научного руководителя д.ф.-м.н. Григорьева Юрия Михайловича за помощь в первых шагах в науке, и за знания, которым он меня обучил.

Иллюстрации

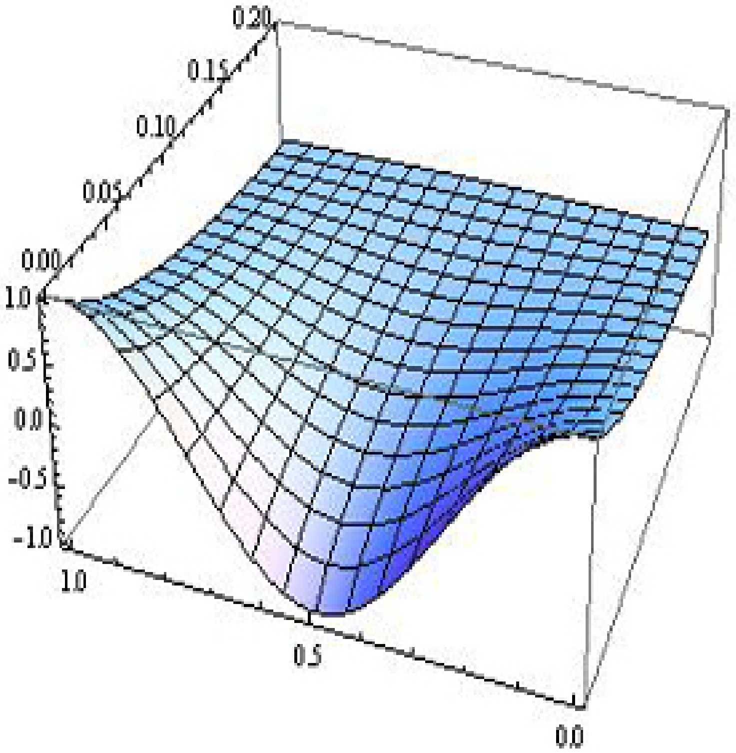

Рис. 1: Компонента перемещения ux

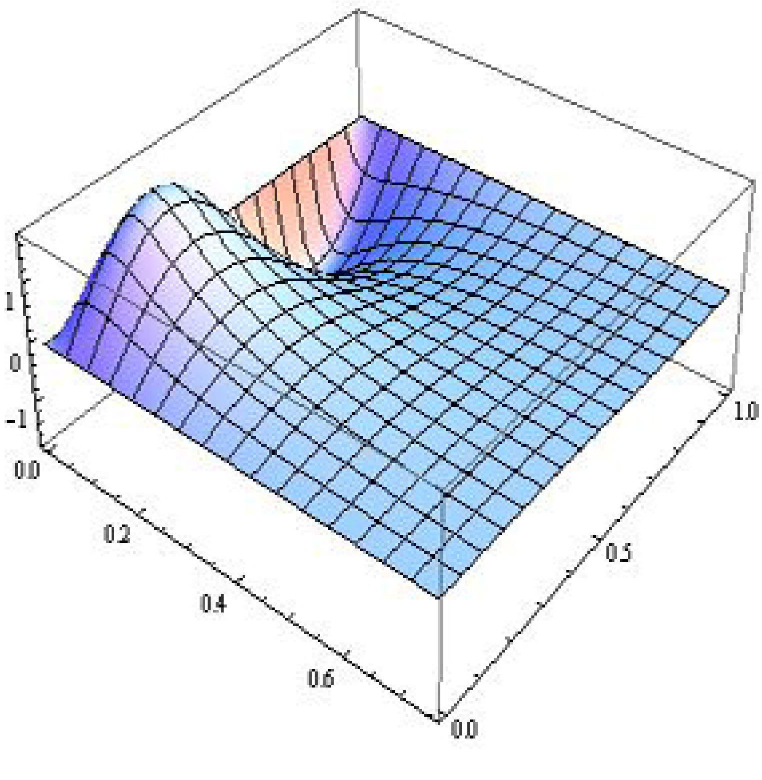

Рис. 2: Компонента вращения

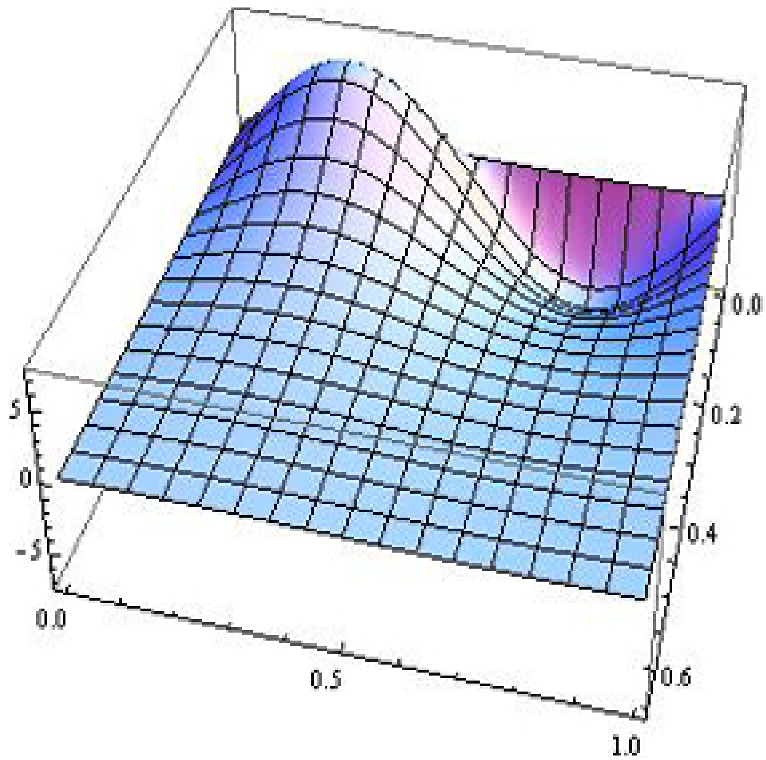

Рис. 3: График разности компонент напряжений