Секция «Математика и механика»

Напряженно деформированное состояние гибких кольцевых пластин переменной жесткости в магнитном поле

Нарольский Михаил Викторович

Аспирант

Киевский Национальный Университет имени Тараса Шевченко, Механико-математический факультет, Киев, Украина

E-mail: jaw4uk@ukr.net

Рассматривается задача магнитоупругости напряженно-деформированного состояния кольцевой пластины переменной жесткости под действием нестационарного магнитного поля и произвольной механической нагрузки. То есть, рассматривается изотропная упругая пластина, изготовленная из материала с конечной проводимостью и которая находится во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0$. Кроме того, пластина является проводником равномерно распределенного стороннего электрического тока плотности $\vec{J}_{CT}$.

В качестве координатной плоскости выбираем срединную плоскость, которая отнесена к полярной системе координат r, θ. Координата γ отсчитывается по нормали к срединной плоскости. Толщина пластины изменяется по двум направлениям, т.е. $h = h\,(r, \theta)$.

Выбирая разрешающие функции $u, v, w, \vartheta_r, S, N_r, \hat{Q}_r, M_r, E_\theta, B_\gamma$ в качестве искомых, после преобразований получаем разрешающую систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами[5].

В векторном виде разрешающая система уравнений будет следующей:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial r} = \vec{F}\left(r, \theta, t, \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \vec{N}}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^4 \vec{N}}{\partial \theta^4}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2}\right). \qquad (1)$$

Добавляя к (**??**) граничные условия $B_1\left(\ \vec{N}\,(r_0, \theta, t)\ \right) = \vec{b}_1$, $B_2\left(\ \vec{N}\,(r_N, \theta, t)\ \right) = \vec{b}_2$, и начальные условия $\vec{N} = 0$, $\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0$ при $t = 0$, получаем краевую задачу для гибких изотропных круглых пластин переменной жесткости в магнитном поле.

Последующее применение схемы Ньюмарка [6]

$$\ddot{u}^{t+\Delta t} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{b\,(\Delta t)^2} - \frac{1}{b}\left[\frac{\dot{u}^t}{\Delta t} + (0,5 - b)\,\ddot{u}^t\right], \dot{u}^{t+\Delta t} = \dot{u}^t + 0,5\Delta t\left(\ddot{u}^t + \ddot{u}^{t+\Delta t}\right) \qquad (2)$$

позволяет весь интервал изменения по времени разбить на отдельные малые интервалы и проследить историю деформирования на каждом временном слое. Здесь b-параметр схемы; верхние индексы указывают на принадлежность величины к соответствующему моменту времени, а Δt - шаг интегрирования.

Соотношение шагов разностной схемы по времени и пространственной координате оговаривается критерием устойчивости Куранта, согласно которому шаг сетки по времени не должен превышать времени, в течение которого возмущение, распространяющееся со скоростью звука, пробегает расстояние, равное размеру шага по пространственной координате. Значение шага по времени нужно выбирать из следующих соотношений:

$$\Delta t < \min \begin{cases} \Delta t / C_M, \\ \frac{0{,}5(\Delta r)^2 \sigma \mu}{\rho^2}. \end{cases}$$

Здесь C_M - скорость распространения магнитоупругих возмущений; Δr - шаг по пространственной координате. Первое условие - это условие устойчивости - критерия Куранта для гиперболической группы уравнений, а второе условие - для уравнений параболического типа.

После применения схемы Ньюмарка (**??**) разрешающую систему магнитоупругости (**??**) для соответствующего временного слоя в векторной форме можно записать таким образом:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial r} = \vec{F}\left(r, \theta, \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \vec{N}}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^4 \vec{N}}{\partial \theta^4}\right), \tag{3}$$

с граничными условиями $D_1\left(\ \vec{N}\left(r_0, \theta\right)\ \right) = \vec{d}_1,\ D_2\left(\ \vec{N}\left(r_N, \theta\right)\ \right) = \vec{d}_2$.

Где D_1, D_2 - задание прямоугольные матрицы; $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ - заданные векторы. Краевая задача (**??**) должна быть дополнена начальными условиями.

На втором этапе двумерную задачу заменяем на одномерную с помощью метода прямых[4]. Предположим, что коэффициенты системы разрешающих уравнений и разрешающих функций – достаточно гладкие функции координаты θ. Производные по этой координате заменим их конечно – разносными аналогами. Разделяя отрезок изменения координаты θ на n полос, двумерную задачу (**??**) аппроксимируем системой обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $10n$ для взаимосвязанных функций $\vec{N}^i(i{=}1{,}2{,}\ldots,\ n)$.

Подставляя в систему (**??**) вместо производных по координате θ конечно – разностные аналоги, получаем нелинейную систему $10n$-го порядка, которая в конечных разностях имеет вид:

$$\frac{d\vec{N}_1}{dr} = \vec{F}\left(r, \vec{N}_1\right), \tag{4}$$

с краевыми условиями $G_1\left(\ \vec{N}_1\left(r_0\right)\ \right) = \vec{g}_1,\ G_2\left(\ \vec{N}_1\left(r_N\right)\ \right) = \vec{g}_2$.

Система уравнений (**??**) является нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений $10n$-го порядка с переменными коэффициентами.

С помощью метода квазилинеаризации [2] исходная краевая задача (**??**), сводится к последовательности линейных краевых задач.

$$\frac{d\vec{N}^{k+1}}{dr} = \vec{F}_1\left(r, \vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k\right), \tag{5}$$

$$G_1\left(\vec{N}^k\right)\vec{N}^{k+1}\left(r_0\right) = \vec{g}_1\left(\vec{N}^k\right),\ G_2\left(\vec{N}^k\right)\vec{N}^{k+1}\left(r_N\right) = \vec{g}_2\left(\vec{N}^k\right),\ (k = 0, 1, 2, ...).$$

Где $\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k$ - решения соответственно на $(k+1)$-ой и k-ой итерациях; $\vec{F}_1\left(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k\right)$ - вектор правой части системы уравнений; $G_1\left(\vec{N}^k\right), G_2\left(\vec{N}^k\right), \vec{g}_1\ \left(\vec{N}^k\right), \vec{g}_2\ \left(\vec{N}^k\right)$ -

соответственно матрицы и правые части граничных условий. На каждом шагу итерационного процесса коэффициенты правой части линейной системы уравнений (**??**), элементы матриц G_1, G_2 и компоненты векторов $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ граничных условий зависят от количества шагов по пространственной и временной переменным, а также от решения линейной задачи на предыдущем шаге, то есть последовательность краевых задач является связанной последовательностью линейных задач. Каждая из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решается численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации [3]. На первом по времени шаге за начальное приближение в итерационном процессе берется решение краевой задачи в линеаризованной постановке. На следующих шагах - за начальное выбирается решение, полученное на предыдущем шаге, которое является решением уже нелинейной задачи. Выбор такой схемы существенно уменьшает количество итераций, необходимых для решения задачи. Изложенная методика позволяет алгоритмизировать вычислительной процесс и решения геометрически - нелинейных краевых задач магнитоупругости кольцевых пластин переменной жесткости.

Литература

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин М.; Наука, 1977.

2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.; Мир, 1968.

3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений //Успехи мат. наук., 1963. Т. 16. вып. 3. С. 171-174.

4. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок. Київ; Либідь, 1993.

5. Улитко А.Ф., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. Київ; Либідь, 1994.

6. Newmark N.M. A method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc., ASCE. 1959. vol. 85. № 7. P. 67-97.