Секция «Математика и механика»

Оптимальная стратегия страховщика при возможности перестрахования и вложения в рисковый актив

Громов Александр Николаевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: gromovaleksandr@gmail.com

Рассматривается страховая компания, которая имеет возможность выбирать и неограниченное число раз динамически заключать договора перестрахования эксцедента убытка. Кроме того, компания может вкладывать имеющиеся у нее средства в некоторый рисковый актив.

Капитал страховой компании X_t является процессом Крамера-Лундберга с интенсивностью поступления требований $\lambda > 0$ и функцией распределения требований G. Пусть T_i - моменты поступления требований, N_t - количество требований на отрезка $[0, t]$, а Y_i - размер i-го убытка. Пусть $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ - это совокупный убыток на промежутке $[0, t]$. Пусть также скорость поступления страховых премий равна $c > 0$, причем в нее включена нагрузка безопасности, т.е. $c > \lambda E[Y_i]$.

Стратегия перестрахования - это некоторый процесс $b = \{b_t, \quad t \geq 0\}$. Согласно договору эксцедента убытка, перестраховщик покрывает убыток цедента, если его величина превосходит уровень собственного удержания; соответственно, часть убытка, которая останется цеденту, равна $\min(Y, b)$. Обозначим $c(b_t)$ часть премии, остающейся у страховой компании после оплаты услуг перестраховщика. Функция $c(b)$ предполагается непрерывной.

В данной работе также предполагается наличие некоторого рискового актива, в который страховая компания может вкладывать свой капитал. Стоимость Z_t данного актива описывается моделью Блэка-Шоулза, т.е. $Z_t = \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}$. Компания может выбирать какую сумму A_t из своего капитала она переводит в рисковый актив. Далее, пусть фильтрация F_t порождается двумерным процессом (S_t, W_t), где W_t - это стандартное броуновское движение, не зависящее от процесса S_t.

Итак, в данной работе рассматриваются стратегии вида $(A, b) = \{(A_t, b_t), \quad t \geq 0\}$, согласованные с фильтрацией F_t. Капитал страховой компании при использовании некоторой стратегии (A, b) удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX_t^{A,b} = c(b_t + \mu A_t)dt + A_t \sigma dW_t - d\sum_{i=1}^{N_t} \min\{Y_i, b_{T_i}\},$$

где $X_0^{A,b} = x$ - начальный капитал.

Наша задача состоит в поиске стратегии (A, b), максимизирующей вероятность неразорения страховой компании $\delta_{A,b}(x) = P(X_t^{A,b} \geq 0, t \geq 0 | X_0^{A,b} = x)$. В данном случае оказывается, что оптимальная вероятность неразорения удовлетворяет следующему уравнению типа Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\sup_{A\in R^+, b\in R^+}\{\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (c(b)+\mu A)f'(x) + \lambda[\int\limits_0^b f(x-\min\{b,y\})dG(y) - f(x)]\} = 0.$$

В данной работе доказана теорема верификации, т.е., что решение данного уравнения дает оптимальную стратегию. Кроме того, исследованы условия, при которых существует решение данного уравнения. Наконец, решение уравнения и построение оптимальной стратегии, реализовано на численном примере.

Литература

1. Hipp C. and Plum M. Optimal investment for insurers // Insurance Math. Econom., 27, 215–228, 2000.
2. Hipp C. and Vogt M. Optimal dynamic XL reinsurance // ASTIN Bulletin, 33, 193–207, 2003.
3. Schmidli H. On minimizaing the ruin probability by investment and reinsurance // The Annals of Applied Probability, 12, 3, 890–907, 2002.
4. Schmidli H. Stochastic Control In Insurance. Springer-Verlag, London, 2008.

Слова благодарности

Автор хотел бы поблагодарить за постановку задачи и помощь в реализации идеи доктора физ.-мат. наук, профессора Булинскую Екатерину Вадимовну.