Секция «Математика и механика»

Когда миноры порядка r матрицы переменных образуют тропический базис?

Шитов Ярослав Николаевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: rmap@yandex.ru

Тропическое полукольцо есть множество $\mathbb{R}$ с операциями $a \oplus b = \min\{a, b\}$, $a \otimes b = a + b$. Существуют различные способы определить понятие ранга матриц над тропическим полукольцом, некоторые из них описаны в работах [1, 3]. Мы рассматриваем понятия тропического ранга и ранга Капранова, см. [3].

В работе [3] показано, что тропический ранг любой матрицы не превосходит ее ранга Капранова, и приведен пример матрицы размера 7×7 с рангом Капранова 4 и тропическим рангом 3. В работе [2] была установлена связь с понятием тропического базиса (см. [3]). А именно, было показано, что миноры порядка $r + 1$ матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис в том и только том случае, если все матрицы размера $d \times n$, тропический ранг которых не больше r, имеют ранг Капранова, не больший r. М. Чан, А. Йенсен и Е. Рубеи формулируют следующий вопрос.

Вопрос. [2, вопрос 1.1] При каких d, n и r миноры порядка $r+1$ матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис?

Мы отвечаем на этот вопрос, показывая, что миноры порядка $r + 1$ матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис в том и только том случае, если $r \leqslant 2$, или $r = \min\{d, n\} - 1$, или $r = 3$ и $\min\{d, n\} \in \{5, 6\}$. Кроме того, мы приводим (см. [4]) пример матрицы размера 6×6 с тропическим рангом 4 и рангом Капранова 5. Эта матрица содержит минимальное число строк и минимальное число столбцов среди всех матриц с различными тропическим рангом и рангом Капранова.

Литература

1. Akian M., Gaubert S., Guterman A. Linear independence over tropical semirings and beyond // Contemporary Mathematics, 2009, No. 495, p. 1–38.

2. Chan M., Jensen A. N., Rubei E. The 4x4 minors of a 5xn matrix are a tropical basis // Linear Algebra Appl., 2010, doi:10.1016/j.laa.2010.09.032.

3. Develin M., Santos F., Sturmfels B. On the rank of a tropical matrix // Discrete and Computational Geometry (E. Goodman, J. Pach and E. Welzl, eds.). MSRI Publications, Cambridge Univ., Press, 2005.

4. Shitov Ya. Example of a 6-by-6 Matrix with Different Tropical and Kapranov Ranks // arXiv:1012.5507v1, 2010.

Слова благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А. Э. Гутермана за постоянное внимание к работе и интересные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта МД-2535.2009.1.