

Секция «Математика и механика»

Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области

Сураган Дурвудхан

Студент

КазНУ имени Аль-Фараби, механико-математической, Алматы, Казахстан

E-mail: suragan@list.ru

Рассмотрим неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \widehat{k}^2(x)u = f, x \in R^n, \quad (1)$$

где $f \in C^1, \widehat{k}^2(x)(R^n)$ и $\text{supp} f, \text{supp} \widehat{k}^2(x) \subseteq \bar{\Omega}$ (Ω ограниченная область с достаточно гладкой границе $\partial\Omega$), решения которого удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(n-1)/2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) = 0, \quad (2)$$

требуящим, чтобы на бесконечности волны рассеяния были уходящими в соответствии с физическим смыслом задачи. Здесь функция $\widehat{k}^2(x)$ определяется свойствами среды внутри Ω , k - волновое число и r - радиальная координата.

Теорема. Классическое решение задачи (1)-(2) существует, единственно и удовлетворяет следующему граничному условию

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Обратно, если функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (3), то она совпадает с решением задачи (1)-(2) в $\bar{\Omega}$.

Где ε_n - фундаментальное решение оператора Гельмгольца $(\Delta + k^2), k \equiv \text{const}$, удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда (2).

Литература

1. Безменов И.В. Перенос условий излучения Зоммерфельда на искусственную границу области, основанный на вариационном принципе // Математический сборник. 1994. No. 185:3. С. 3-24.
2. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральному вопросу объемного потенциала // Доклады РАН. 2009. No. 428:1. С. 16-19.
3. Ditkowski A., Suhov A. Near-eld innity-simulating boundary conditions for the heat equation // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2008. No. 105:31. pp. 10646-10648.
4. Kalmenov T. Sh., Suragan D. A Boundary Condition and Spectral Problems for the Newton Potentials // Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations, Operator Theory: Advances and Applications, eds. M. Ruzhansky, J. Wirth, Springer, Basel, 2011. No. 216 (appeared).