Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Изучение локальной оптимальности отдельных траекторий в задаче Ридса-Шеппа.

Самыловский Иван Александрович

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия

E-mail: camarada.sam@gmail.com

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления [1]:

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = u\sin\varphi, & x(t_0) = 0, & x(T) = x_T\,, \\ \dot{y} = u\cos\varphi, & y(t_0) = 0, & y(T) = y_T\,, \\ \dot{\varphi} = v, & \varphi(t_0) = 0, & \varphi(T) \ \text{свободно}, \\ |u| \le 1, & |v| \le 1, & J = T \to \min\,. \end{array} \tag{1}$$

Здесь φ есть угол между направлением скорости $(\dot{x}, \dot{y})$и осью ординат, начальный момент времени t_0 фиксирован. Анализ принципа максимума позволяет выделить все типы стационарных траекторий. Здесь мы рассмотрим лишь два типа стационарных траекторий "релейного"характера.

Тип 1: $u = 1$ при $t \in [0;\alpha]$, $u = -1$ при $t \in (\alpha; 2\alpha]$, $v = 1$ всюду.

Тип 2: $u = 1$ при $t \in [0;\alpha) \cup (3\alpha; 4\alpha]$, $u = -1$ при $t \in [2\alpha; 3\alpha]$, $v = 1$ при $t \in [0; 2\alpha)$, $v = -1$ при $t \in [2\alpha; 4\alpha]$.

В обоих типах $\alpha \in (0, \pi/2)$. Можно показать, что некоторые траектории этих типов не являются глобально оптимальными. Тем не менее, представляет интерес вопрос об их локальной оптимальности. Этот вопрос может быть разрешен с помощью условий "второго"порядка из [2]. А именно, надо рассмотреть суженную конечномерную задачу, состоящую в варьировании только точек переключения данной экстремали, и локальная минимальность данной траектории в суженной задаче гарантирует сильный минимум на данной экстремали в исходной задаче. На этом пути получены следующие результаты.

Теорема. Траектории типа 1 доставляют изолированный минимум в задаче (1) независимо от указанных значений α. При $\alpha \in (\arccos(2-\sqrt{3}); \pi/2)$ траектория типа 2 доставляет сильный минимум в задаче (1). При $\alpha \in (0; \arccos(2-\sqrt{3}))$ траектория типа 2 не является локально оптимальной в задаче (1).

Литература

1. J.A. Reeds and L.A. Shepp. Optimal path for a car that goes both forwards and backwards//Pacific Journal of Mathematics, vol.145, No.2 (1990), pp.367-393.

2. H. Maurer and N.P. Osmolovskii. Second order sufficient conditions for time-optimal bang-bang control//SIAM Journal on Control and Optimization, vol.42, No.6 (2003), pp.2239-2263.