Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Об одной задаче оптимального управления распределённой системой первого порядка

Вещинская Виктория Валерьевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: luce.etterna@gmail.com

Данная работа посвящена исследованию задачи оптимального управления распределённой системой первого порядка. Рассмотрим динамическую систему, которая задаётся уравнением переноса с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial x(t,l)}{\partial t} + g\frac{\partial x(t,l)}{\partial l} = -\mu x(t,l)\ (t \in [0,T], l \in [0,L]).$$
(1)

Здесь $x(t,l)$ - скалярная фазовая переменная, $t \in [0,T]$ - независимая временная переменная, $l \in [0,L]$ - независимая одномерная пространственная переменная, $T > 0$, $L > 0$, $g > 0$ и $\mu > 0$ - заданные параметры. На систему (1) накладывается начальное условие общего вида (2): $x(0,l) = x_0(l) \quad (l \in [0,L])$ и нелокальное краевое условие вида (3): $x(t,0) = p(t) + \int_{l_0}^{L} \beta(l)x(t,l)dl \quad (t \in [0,T])$, где $x_0(\cdot) : [0,L] \mapsto R_1^+,\ p(\cdot) : [0,T] \mapsto R_1^+$ - заданные функции, $l_0 \in [0,L]$ - заданный параметр. Для построения аналитического решения используется метод характеристик [1], [2]. С его помощью решение системы (1)-(3) представляется в виде

$$\text{x(t,l)}=\begin{cases} a(t-\frac{l}{g})e^{-\frac{\mu}{g}l},\ l \in [0,gt], \\ x_0(l-gt)e^{-\mu t},\ l \in [gt,L] \end{cases} \ (t \in [0,T]),$$

где через $a(\cdot)$ обозначена функция, задающая краевое условие (3).

Теорема 1 *Пусть выполнены следующие условия: (A1) функции $x_0(\cdot)$ и $p(\cdot)$ непрерывно-дифференцируемы; (A2) начальное и краевое условия согласованы. Кроме того, $\beta(l) = \beta = const$, $l_0 = 0$. Тогда решение системы (1)-(3) имеет следующий вид:*

$$x(t,l) = \begin{cases} C(t-\frac{l}{g})e^{g\beta t-\mu t-l\beta},\ l \in [0,gt], \\ x_0(l-gt)e^{-\mu t},\ l \in [gt,L] \end{cases} \ (t \in [0,T]),$$

где $C(t) = e^{(\mu-g\beta)t}p(t) + \int_0^L \beta x_0(l)dl + \int_0^t \left(g\beta p(t) - ge^{-\mu t}\beta x_0(L-gt)\right)e^{(\mu-g\beta)t}dt\ (t \in [0,T])$.

Далее сформулируем задачу оптимального управления. Пусть функция $x_0(\cdot)$, задающая начальное условие (2), имеет следующий вид

$$\mathrm{x}_0(l) = \left\{ \begin{array}{c} \bar{x}(l), \text{ при } l \in [0, \bar{l}), \\ (1-\alpha)\bar{x}(l), \text{ при } l \in [\bar{l}, L] \end{array} \right. \quad (t \in [0, T]),$$

где $\bar{l} \in [l_0, L]$, $\alpha \in [0,1]$; а $\bar{x}_0(\cdot)$ - стационарное решение системы, то есть решение системы $g\frac{d\bar{x}(l)}{dl} = -\mu\bar{x}(l), \;\; x(0) = p_0 + \int_{l_0}^{L} \beta(l)x(t,l)dl$, где $l \in [0, L]$, а $p_0 \geq 0$ - заданный параметр. В дальнейших рассуждениях параметры $\alpha \in [0,1]$, $\bar{l} \in [l_0, L]$ и функция $p(\cdot)$ играют роль управлений. Определим функционалы $B(p(\cdot), \alpha, \bar{l}) = c\alpha \int_{\bar{l}}^{L} x(0,l)dl$ и $C(p(\cdot), \alpha, \bar{l}) = \int_0^L (x(T,l) - x_0(l))^2 dl$, и с их помощью определим функционал, являющийся взвешенной суммой B и C с заданным весом $\sigma \in [0,1] : \;\; U(p(\cdot), \alpha, \bar{l}, K) = \sigma B(p(\cdot), \alpha, \bar{l})) - (1-\sigma)C(p(\cdot), \alpha, \bar{l})$. Таким образом, рассматривается задача оптимального управления описанной системой (1)-(3) с функционалом $U(p(\cdot), \alpha, \bar{l}, K)$.

Работа имеет практическое приложение к моделированию динамики роста биомассы леса и решению задачи оптимального лесопользования [3].