Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Оптимизация процесса лечения хронического миелоидного лейкоза

Винников Евгений Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: evinnikov@gmail.com

В работе исследуется задача оптимального управления в математической модели, описывающей процесс лечения хронического миелоидного лейкоза с использованием лекарств и химиотерапии.

Пусть $x_1(t)$ — количество незаражённых Т–лимфоцитов, $x_2(t)$ — количество эффекторных Т–лимфоцитов, $x_3(t)$ — количество раковых клеток. Рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 - b_1 x_1 u_2 - c_1 x_1 \frac{x_3}{x_3+d}, & u_1 \in [u_{1min}, u_{1max}],\ x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = (c_2 x_1 + c_3 x_2)\frac{x_3}{x_3+d} - b_2 x_2 u_2 - c_4 x_2 x_3, & u_2 \in [u_{2min}, u_{2max}],\ x_2(0) = x_{20}, \\ \dot{x}_3 = b_3(1-u_1)x_3 \ln\frac{f}{x_3} - b_4 u_2 x_3 - c_5 x_2 x_3, & x_3(0) = x_{30}. \end{cases}$$

Здесь управление $u_1(t)$ характеризует интенсивность введения лекарственных препаратов, воздействующих только на раковые клетки, а $u_2(t)$ — интенсивность химиотерапии, воздействующей на все клетки, все остальные коэффициенты постоянны, положительны и индивидуальны для каждого пациента.

На заданном конечном горизонте времени T ставится задача минимизации функционала $J = \int\limits_0^T \alpha_3 x_3(t) - \alpha_1 x_1(t) + \beta_1 u_1^2(t) + \beta_2 u_2^2(t)\mathrm{dt} + \gamma_3 x_3(T) - \gamma_1 x_1(T) \to \min\limits_{u_1,u_2}$. В зависимости от выбора неотрицательных весовых коэффициентов α, β, γ получаются различные задачи оптимального управления.

Исследование поставленной задачи проводилось с использованием принципа максимума Понтрягина [1,2]. Для решения краевой задачи принципа максимума Понтрягинав среде *Matlab* была разработана программа *Leukemia*. Как показывают численные эксперименты, оптимальное управление в данной задаче может иметь более одной точки переключения. Было построено трехмерное множество достижимости данной управляемой системы, относительно которого был проведен анализ поведения оптимальной траектории.

Литература

1. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина. // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. М., МАКС Пресс, 2003, с. 57-67.

2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.

3. Nanda S., Moore H., Lenhart S. Optimal control of treatment in a mathematical model of chronic myelogenous leukemia. // Mathematical Bioscinces. 2007. №210. P. 143–156.