МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Тезисы докладов

Секции «Математика и механика»
Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов–2009»

Москва, 2009

Тезисы докладов Секции «Математика и механика» Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов–2009». – М.: Механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, 2009. 104 с.

Рецензенты:
КУДРЯВЦЕВ Валерий Борисович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математической теории интеллектуальных систем, академик РАЕН и АТН РФ заместитель председателя оргкомитета секции по отделению математики;
СМИРНОВ Николай Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией волновых процессов, академик РАЕН, заместитель декана, заместитель председателя оргкомитета секции по отделению механики.

Редактор:
Мартыненко Дмитрий Романович, заместитель председателя Студенческого Совета, ответственный секретарь оргкомитета секции.

Содержание

Оргкомитет и жюри секции «Математика и механика»

Оргкомитет секции

Председатель – Чубариков Владимир Николаевич, и.о. декана, д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа

Заместители председателя:

Кудрявцев Валерий Борисович – заведующий кафедрой математической теории интеллектуальных систем, д.ф.-м.н.;

Сергеев Игорь Николаевич – заместитель декана по научной работе, профессор кафедры дифференциальных уравнений, д.ф.-м.н.;

Попов Алексей Николаевич – аспирант, председатель Студенческого Совета факультета.

Ответственный секретарь – Мартыненко Дмитрий Романович – студент 3 курса, заместитель председателя Студенческого Совета факультета.

Члены оргкомитета: студентка 4 курса Базарова Алина Евгеньевна, студент 3 курса Воробьев Роман Юрьевич, студентка 3 курса Воронина Анна Анатольевна.

Экспертный совет секции

Председатель – Чубариков Владимир Николаевич, и.о. декана, д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа

Заместители председателя:

Кудрявцев Валерий Борисович – заведующий кафедрой математической теории интеллектуальных систем, д.ф.-м.н.;

Смирнов Николай Николаевич – заместитель декана, профессор кафедры газовой и волновой динамики, д.ф.-м.н.

Члены экспертного совета: доцент Арафайлов Сергей Игоревич, профессор Касим-Заде Октай Мурадович, доцент Козлов Михаил Васильевич, профессор Латышев Виктор Николаевич, доцент Мартынова Елена Дмитриевна, профессор Нестеренко Юрий Валентинович, профессор Успенский Владимир Андреевич, профессор Фоменко Анатолий Тимофеевич, профессор Шамаев Алексей Станиславович, профессор Ширяев Альберт Николаевич.

В рамках конференции состоялись лекции ведущих учёных

1. «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», профессор В.Б.Кудрявцев. Среда 15.04.2009, ауд. 01, 16:45.
2. «Принцип оптимальности в природе, математические методы исследования и минимальные сети как иллюстрация», профессор А.А.Тужилин и профессор А.О.Иванов. Четверг 16.04.2009 ауд. 01, 13:00.

Контактная информация оргкомитета

Адрес: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Механико-математический факультет (ауд. 13-19а).

По всем вопросам обращаться: помощник ответственного секретаря Базарова Алина Евгеньевна, +7 916 8483695

Факс: +7 495 9392090 (с пометкой «Для оргкомитета конференции «Ломоносов–2009»).

Отделение математики

Победителем подсекции математики признан Д.Н. Жук.

Грамотами за лучшие доклады на подсекции математики награждены Алексеев Д.В., Белянцев О.В., Будников Ю.А., Волков Н.Ю., Жук Д.Н., Захарьева Е.В., Кибкало М.А., Кикоть С.П., Кучеренко И.В., Лашева М.И., Моисеев С.В., Рябов Г.В., Сколов А.П., Тимирова А.Н., Тюрин И.С.

Оптимальная стратегия производства и продажи периодической продукции с использованием возможности продажи через интернет и стоковый магазин

Агафонов Антон Евгеньевич
Студент
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, г. Москва, Россия
agafon88@mail.ru

Изучается обобщение модели (см. [1]) производства и продажи некоторого товара, устойчивый спрос на который сохраняется в течение ограниченного промежутка времени. Например, это может быть периодическое печатное издание. Производитель принимает решение об объеме производимой продукции, которую затем продает дистрибьютору по определенной цене. Он, в свою очередь, продает товар в следующий эшелон цепочки продаж по фиксированной цене. Спрос на товар случаен с некоторым заданным распределением. После окончания сезона продаж дистрибьютор возвращает всю непроданную продукцию производителю за некоторую фиксированную компенсацию. Далее, производитель имеет возможность продать весь оставшийся товар через интернет. Спрос на товар случаен и зависит от цены продажи. Всю продаваемую через интернет продукцию сперва необходимо переработать за определенную плату. Весь оставшийся товар сбывается в стоковый магазин по фиксированной цене.

В данной работе рассматривается последовательность нескольких сезонов продаж. Предполагается, что мы имеем дело с таким видом продукции, которую за некоторую плату можно переработать таким образом, что она станет идентичной продукции производимой в следующем сезоне и присоединится к той, которую предприятие произведет в будущем. Решение о переработке некоторого количества продукции для ее продажи в следующем сезоне принимается непосредственно перед началом продаж в интернете. Задача состоит в выборе оптимальной политики производства, ценоопределения и переработки продукции, приводящей к максимизации прибыли производителя.

Литература

1. Tsan-Ming Choi, Duan Li, Houmin Yan (2003) Optimal returns policy for supply chain with e-marketplace // Int. J. Production Economics 88 (2004) 205-227.

Кодирование изображений, инвариантное относительно проективных преобразований плоскости

Алексеев Дмитрий Владимирович[1]

Старший научный сотрудник

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, г. Москва, Россия

dvalex@rambler.ru

В работе рассматривается кодирование изображений, инвариантное относительно проективных преобразований плоскости. Показана равносильность проективной эквивалентности двух изображений и эквивалентности относительно кодирующей функции. Это утверждение является обобщением результатов В.Н.Козлова [2]-[3] для преобразований подобия, ортогональных и аффинных преобразований.

Введем необходимые определения.

***Определение* 1**. Изображением будем называть конечное множество A точек проективной плоскости, т.е. плоскости дополненной бесконечно удаленной прямой.

***Определение* 2.** ([1]) Двойным отношением прямых *OA, OB, OC* и *OD* называют величину $[A,B,C,D]_O = \dfrac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC} : \dfrac{\sin\angle AOD}{\sin\angle BOD}$, где все углы рассматриваются как ориентированные. Если какой-то из знаменателей обращается в 0, будем обозначать это $[A,B,C,D]_O = \infty$.

***Определение* 3.** Пусть Ω – конечное множество точек проективной плоскости. Пусть задана биекция $M : \Omega \leftrightarrow \{1,2,\dots,n\}$ – нумерация точек и кодирующая функция $T : \Pi^n \mapsto \overline{R}^m$, где $m = n \cdot \binom{n-1}{4}$, ставящая множеству Ω в соответствие множество чисел вида $T(\Omega, M) = \{\rho_{s;i,j,k,l} \mid s \neq i,j,k,l\}$, где $\rho_{s;i,j,k,l} = [M^{-1}(i)M^{-1}(j)M^{-1}(k)M^{-1}(l)]_{M^{-1}(s)}$ для тех наборов *i,j,k,l,s*, для которых оно определено, и формальному символу ∞ в противном случае.

Кодом изображения Ω будем называть пару $\langle M, T(\Omega, M)\rangle$.

***Определение* 4.** Изображения Ω_1 и Ω_2 будем называть эквивалентными относительно кодирующей функции *T*, если существуют M_1 и M_2, такие, что $T(\Omega_1, M_1) = T(\Omega_2, M_2)$.

***Определение* 5.** Изображения Ω_1 и Ω_2 будем называть проективно эквивалентными ($\pi -$эквивалентными), если существует проективное преобразование $\Xi : \Omega_1 \to \Omega_2$.

***Определение* 6.** Изображение Ω будем называть плоским проективным изображением, если не существует трех прямых l_1, l_2 и l_3, таких, что $\Omega \subset l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

***Теорема* 1.** Плоские проективные изображения эквивалентны тогда и только тогда, когда они $\pi -$эквивалентны.

Литература

1. Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, Том 2, Геометрия, М: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1987, с. 44-45.
2. Козлов В.Н., Элементы математической теории зрительного восприятия, М., Изд. ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. 128 стр.
3. Козлов В.Н., О кодировании дискретных фигур, Дискретная математика, том 8, вып. 4, 1996, с. 57-61.

[1] Автор выражает признательность профессору д.ф.-м.н. Козлову В.Н. за привлечение внимания к вопросам кодирования изображения и обсуждение задачи.

Индикатор потенциального роста и чистая репродуктивная скорость

Белова Ия Николаевна
Младший научный сотрудник
Учреждения Российской академии наук ИФА им. А.М. Обухова РАН
iya@ifaran.ru

Рассмотрим модель Логофета динамики популяции, обобщающей известные модели Лесли и Лефковича (Клочкова (Белова) И. Н., 2004):

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{x}(t),\ \ t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

где вектор-столбец $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ описывает структуру популяции, а $n\times n$-матрица $\boldsymbol{L}$ имеет вид

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} b_1 + r_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ a_{21} & r_2 & & & & \\ a_{31} & a_{32} & r_3 & & 0 & \\ & & \cdots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & & r_{n-1} & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & & a_{n,n-1} & r_n \end{bmatrix}, \ 0 \le a_{ij} \le 1\ (i > j),$$

где первая строка ненулевая: $b_j \ge 0$ (коэффициенты рождаемости, $j = 1,\ldots, n$), и где $0 < r_j + \Sigma_{i>j}\, a_{ij} \le 1$. Уравнение (1) проецирует заданное начальное состояние популяции $\boldsymbol{x}(0)$ в будущее:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{L}^t\,\boldsymbol{x}(0),\ t = 1, 2,\ldots \qquad (3)$$

и потому матрица $\boldsymbol{L}$ называется *проекционной* матрицей. Следовательно, вычислив максимальное собственное число λ_1 проекционной матрицы $\boldsymbol{L}$, мы можем получить ответ на вопрос: растёт, убывает или остаётся в равновесии модельная популяция. Оказывается, это практически важное свойство модели можно установить, не вычисляя самое λ_1 откалиброванной проекционной матрицы.

Это может сделать *индикатор потенциального роста* (ИПР) – функция $\boldsymbol{R}$, зависящая от демографических параметров популяции, позволяющая определить, растёт модельная популяция, убывает или остаётся в равновесии (Клочкова (Белова), 2004). По определению $\boldsymbol{R} = 1 - p(1, \boldsymbol{L})$, где $p(1, \boldsymbol{L})$ – значение характеристического полинома матрицы переходов $\boldsymbol{L}$ в точке 1.

Чистая репродуктивная скорость $\boldsymbol{V}_0$ (Cushing, Yicang, 1994) показывает, какое число потомков каждая особь произведёт за свою жизнь или скорость роста популяции от одного поколения к другому (Cushing,1998; Cushing et al., 2004) и определяется как собственное число матрицы $\boldsymbol{Q}$, где $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T})^{-1}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{L}$ – матрица переходов.

Показано, что для неразложимых матриц Логофета индикаторное свойство функции $\boldsymbol{R}$ также справедливо и для чистой репродуктивной скорости $\boldsymbol{V}_0$.

Однако ИПР не характеризует то, как быстро популяция растёт или убывает; зная влияние возмущения демографических параметров на ИПР, нельзя говорить о таком же характере влияния на скорость роста популяции λ_1 (Levin et al., 1996).

Литература

1. Клочкова (Белова) И.Н. Обобщение теоремы о репродуктивном потенциале для матриц Логофета. // Вестник МГУ. – 2004. – Выпуск 1. – № 3. – С. 45–48.
2. Levin L.A., Caswell H., T. Bridges, C.D. Bacco, D. Cabrera, G. Plaia. Demographic response of estuarine polychaetes to population: life table response experiments // Ecological Applications. – 1996. –V. 6. – P. 1295-1313.
3. Cushing J. M., Yicang Z. The net reproductive value and stability in matrix population models // Natural Resources Modeling. – 1994. – № 8. – P. 197-333.
4. Cushing J. M., S. Le Varge, N. Chitnis and S.M. Henson. Some discrete competition models and the competitive exclusion principle // Journal of Difference Equations and Applications. – 2004. – V. 10. – № 13-15. – P. 1139-1151.

Базисность корневых функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка

Белянцев Олег Витальевич[2]
Соискатель ученой степени кандидата физико-математических наук
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
факультет Вычислительной математики и кибернетики, г. Москва, Россия
closed@narod.ru

Обозначим $G \equiv (0,\ 1)$, $H \equiv L_2(G)$. Рассмотрим оператор L с дифференциальной операцией $l\,u = \left[\dfrac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\,\dfrac{d}{dx} + p_2(x)\right] u + V(x)\ \varphi(u)$, действующий из класса функций, принадлежащих H, могущих иметь (вместе со своей первой производной) бесконечное число «скачков» определенной структуры. Коэффициенты оператора: $p_1 \in \{g : g' \in L_{1,\rho}(G)\}$; $p_2 \in L_{1,\rho}(G)$; $V \in L_{1,\rho}(G, \mathrm{C}^2)$; $\varphi : H \to \mathrm{C}^2$ (*функционал*); где $L_{1,\rho}(G)$ – пространство функций, суммируемых на G с весом $\rho(x)$, равным расстоянию от точки x до границы G.

Зафиксируем произвольное $\gamma > 0$. Пусть спектральное множество $\Pi = \left\{ \lambda^2 \in \mathrm{C} : \operatorname{Re}\lambda \ge 0, \left|\operatorname{Im}\lambda\right| \le \gamma \right\}$, состоящее из счетного числа точек, удовлетворяет условию $\sum\limits_{\lambda \in Y(\beta)} 1 \le C \quad \forall \beta \ge 0$, где $Y(\beta) = \left\{\lambda : \lambda^2 \in \Pi, \left|\lambda\right| \in [\beta, \beta+1]\right\}$ и сумма берется с учетом кратности λ^2. Предположим, что оператор L имеет сопряженный такого же вида. Рассматривается произвольная биортонормированная в H пара систем функций $\{u_n, v_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $lu_n + \lambda_n^2 u_n = \theta_n u_{n-1}$; $l^* v_n + \overline{\lambda}_n^2 v_n = \theta_{n+1} v_{n+1}$, где $\theta_n = \delta\{\lambda_n, |\lambda_n| \ge 1; 1, |\lambda_n| < 1\}$, $\delta \in \{0,1\}, \theta_1 = 0$;

2) хотя бы одна из систем $\{u_n\}, \{v_n\}$ полна и минимальна в H.

Теорема 1. Для того чтобы каждая из систем $\{u_n\}, \{v_n\}$ являлась базисом Рисса в H, необходимо и достаточно, чтобы одна из этих систем была почти нормированной в H.

Теорема 2. Для того чтобы каждая из систем $\{u_n\}, \{v_n\}$ образовывала безусловный базис в H, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа C_1: $\|u_n\|_H \ \|v_n\|_H \le C_1 \quad \forall\ n \in N$.

Литература

1. Ломов И.С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка.// Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, N 9. С. 1550-1563.
2. Белянцев О.В. Интегральные представления разрывных решений сингулярного дифференциального оператора второго порядка на конечном интервале.// Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, N 3. С. 291-300.
3. Белянцев О.В. Неравенство Бесселя и свойство базисности корневых функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка.// Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, N 8. С. 1011-1020.
4. Ломов И.С. Пример разрывного оператора, имеющего разрывный сопряженный. Свойство базисности.// В сб.: Задачи матем. физики и спектральная теория операторов. N 215. М.: МЭИ. 1989. С. 46-50.

[2] Автор выражает признательность профессору, д.ф-м.н. Ломову И.С. за помощь в подготовке тезисов.

Необходимые условия оптимальности для одной задачи оптимального управления с запаздыванием

Боков Григорий Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, г. Москва, Россия
bokovgrigoriy@gmail.com

Представленные результаты являются обобщением принципа максимума Понтрягина на случай задачи оптимального управления с параметрами запаздывания по времени.

Задача оптимального управления с запаздыванием формулируется в следующей форме. В классическую задачу оптимального управления вводятся постоянные параметры запаздывания, как в фазовую переменную, так и в переменную управления. Причем параметры запаздывания, входящие в фазовую переменную и управление, предполагаются различными. Задача рассматривается на конечном промежутке времени, который представляет собой отрезок на вещественной прямой. Фазовая переменная представляет собой непрерывную вектор-функцию, имеющую кусочно-непрерывную производную, т.е. производная непрерывна всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода. Переменная управления – это кусочно-непрерывная вектор-функция. Функционал, для которого ищется минимум, является интегралом по отрезку с непрерывной подынтегральной функцией, которая имеет непрерывные частные производные по фазовой переменной и переменной управления. Уравнение связи для фазовой переменной описывается неавтономным дифференциальным уравнением первого порядка с запаздыванием, правая часть которого описывается непрерывной вектор-функцией, имеющей непрерывные частные производные по фазовой переменной и переменной управления. Параметры запаздывания входят только в правую часть уравнения.

Для данной постановки задачи оптимального управления доказывается теорема, дающая необходимые условия оптимальности решения. В данные условия входят, во-первых, уравнение Эйлера, которое представляет собой систему дифференциальных уравнений с опережающей переменной, т.е. в уравнения входит переменная, имеющая параметр опережения по времени. Во-вторых, принцип максимума с параметром запаздывания, являющийся аналогом принципа максимума Понтрягина для классической задачи оптимального управления. И, в-третьих, условия трансверсальности.

Кроме того, производится обобщение данной задачи на случай бесконечного промежутка времени. Для данного случая также даются необходимые условия оптимальности.

Данная задача оптимального управления позволяет расширить средства математического моделирования на случай динамических систем, в которых ключевые атрибуты имеют отставание или запаздывание по времени. Что представляет собой значительный шаг вперед по сравнению с моделированием, которое не включает параметры запаздывания.

Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Матвеев А.С. Задачи оптимального управления с запаздыванием общего вида и фазовыми ограничениями, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1988, 52:6, 1200-1229.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1976.
4. Харатишвили Г.Л. Оптимальные процессы с запаздыванием. - Т., 1966.
5. Chak-Hong Lee Nonlinear time-delay optimal control problem: optimality conditions and duality, 1995.

Об асимптотическом поведении хроматического индекса случайных гиперграфов

Будников Юрий Александрович
Аспирант Механико-математического факультета
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия
y.budnikov@mail.ru

Пусть $k \geq 2$ – фиксированное натуральное число. Будем рассматривать гиперграфы G = (V,E) – k-однородные, то есть каждое ребро, которое содержит в точности k вершин. Упаковка в G – набор P непересекающихся ребер G. $\chi(G)$ – хроматический индекс – минимальное число упаковок, на которые можно разбить все ребра G.

Утверждение 1. Для любых $\delta > 0, \partial' > 0$, для любой возрастающей функции g(n) можно построить класс гиперграфов G(n) с возрастающим $k(n)$ – числом вершин на ребре – так, что $k(n) < g(n)$ для любых n, и D(n) – максимальной степенью его вершин: при $n = n_k, k = 1,2,...$- возрастающая подпоследовательность натуральных чисел – будет выполнено: $\chi(G) = k(D(n)-1)+1$.

Теорема 1. Пусть константа c > 1. В модели случайного гиперграфа G(n,p) для случая растущей $k(n)$ – числа вершин на ребре G(n,p) – при стандартном выборе $p = \dfrac{D(n)}{C_{n-1}^{k-1}}, D(n) = o(C_{n-1}^{k-1}), n \to \infty$:

1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D(n)}{e^k} < 1$, то $P(G(n,p)$ содержит упаковку размера $\dfrac{n}{kc}) \to 0, n \to \infty$
2) Если для некоторой константы d>1 выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D(n)}{de^k} > 1$, то $P(G(n,p)$ содержит упаковку размера $\dfrac{n}{kc}) \to 1, n \to \infty$

Теорема 2. В условиях Теоремы 1 для любой $c > 1$ $P(\chi(G(n,p)) \geq cD(n)) \to 1, n \to \infty$.

Литература

1. Nicholas Pippenger and Joel Spencer, Asymptotic behavior of the Chromatic Index for Hypergraphs, Journal of combinatorial theory, Series A 51, 24-42 (1989).
2. Будников Ю.А., "О мощности ребер гиперграфа" (с.70-72), Материалы IX Международной конференции "Интеллектуальные системы и компьютерные науки", 2006.

Об автоматной модели преследования в плоских лабиринтах

Волков Николай Юрьевич
Младший научный сотрудник
МГУ имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет, г. Москва, Россия
volkov-n-y@rambler.ru

Изучается процесс преследования коллективом автоматов («хищников») нескольких независимых друг от друга автоматов («жертв»). Преследование происходит в плоских областях (лабиринтах) следующих типов: полуплоскость, полоса ширины l, полуполоса ширины l, квадрант и квадрат со стороной l.

Показано, что для каждого из первых трех типов лабиринтов существует конечный коллектив хищников, который в любом лабиринте данного типа «ловит» любую конечную независимую систему жертв, таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки хищников. Это же утверждение верно для лабиринта, представляющего собой квадрант, если скорость хищников превосходит скорость жертв более чем в 3 раза.

Однако, этот результат не имеет места для лабиринтов типа квадрат. Показано, что для произвольного конечного коллектива хищников существует натуральное число l, такое, что для произвольного начального расположения хищников в квадрате со стороной l существует независимая система жертв, таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, и их начальное расположение в квадрате со стороной l, при котором все жертвы «убегают» от хищников. В то же время показано, что для произвольной конечной независимой системы жертв существует конечный коллектив хищников, который при любом натуральном l «ловит» данную систему жертв в квадрате со стороной l при любом начальном расположении в квадрате жертв и стартующих из одной точки хищников.

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Наука, 1985.
2. Г. Килибарда, В.Б. Кудрявцев, Ш. Ушчумлич. Независимые системы автоматов в лабиринтах. Дискретная математика, т. 15 вып. 2, 2003.
3. Г. Килибарда, В.Б. Кудрявцев, Ш. Ушчумлич. Коллективы автоматов в лабиринтах. Дискретная математика, т. 15 вып. 3, 2003.
4. Грунская В.И., О динамическом взаимодействии автоматов. в кн.: Математическая кибернетика и ее приложения к биологии, МГУ, 1987, стр. 8-18.
5. Н.Ю.Волков. Об автоматной модели преследования. Дискретная математика, т.19, вып.2., стр. 131-160, 2007 г.
6. Н.Ю.Волков. Об автоматной модели преследования в базовых плоских областях. Интеллектуальные системы, т.11, вып.1-4, стр. 361-402, 2007г.

Применение «Золотой пропорции» в архитектуре Республики Беларусь

Выучейский Владислав Васильевич

Учащийся лицея

Полесский государственный университет, лицей, Пинск, Белоруссия

kotiara25@yandex.ru

В Республике Беларусь уделяется большое внимание развитию туризма. Одним из направлений развития сферы туризма в нашей стране является агроэкотуризм. Агроэкотуризм включает в свои программы туры эколого-этнографического или археологического значения (архитектурные памятники и живопись).

В моей работе исследуется взаимосвязь этнографических памятников и культурных ценностей нашей страны на предмет соответствия пропорции «Золотого сечения» как наиболее оптимального метода гармоничного строительства культурных объектов в сфере туризма.

“Золотое сечение” – это такое деление целого на две неравные части, при котором целое так относится к большей части, как большая к меньшей. “Золотое сечение” – это иррациональное число, оно приблизительно равно 1,618, [1, 2, 3].

Изучив литературу по Мирскому замку, рассмотрев чертежи и планы, я обнаружил соблюдение «Золотых пропорций». Все башни замка, расположение жилых зданий подчинены принципам «Золотого сечения». Часовня-усыпальница, расположенная позади замка, имеет в своём проекте «Золотые пропорции». Рассматривая замок в Несвиже, изучая соответствующий материал, биографию архитектора, я пришёл к выводу, что Дж. М. Бернардони, являющийся учеником Виньолы, в своём творчестве широко использовал методы «Золотого сечения». Этими проектами являются Несвижский замок и костёл Тела

Господня. Костёл является прототипом римского храма Иль-Джезу. Этот храм построил Джакомо Бароццида Виньола, учитель Бернардони. Иезуитский коллегиум в Пинске является достопримечательностью города. Я обнаружил в этом костёле, что при строительстве здания был использован ряд Фибоначчи. Как известно, этот ряд является замечательным примером «Золотого сечения». По мере увеличения чисел ряда отношение асимптотически приближается к точной пропорции «Золотого сечения»(1:1,618). Изучив историю создания дворца Бутримовича (г. Пинск), рассмотрев чертежи, я пришёл к заключению, что при проектировке был использован ряд Фибоначчи и принцип «Золотого сечения».

В Национальной программе развития туризма в Республике Беларусь на 2006-2010 годы агроэкотуризм выделен в качестве одного из важнейших направлений развития. Перед специалистами, владельцами агроусадеб, органами власти поставлен ряд задач: создание туристских деревень с традиционной народной архитектурой на основе существующих сельских поселений, расположенных в живописной местности. Для создания туристских деревень с традиционной народной архитектурой можно использовать принцип «Золотого сечения». Это позволит придать зданиям красоту, гармонию и симметрию. Также использование моего исследования в архитектуре построек в Несвиже, Мире и Пинске можно применить для привлечения большого числа туристов. Также применение моих исследований возможно для дальнейшего гармоничного строительства и реставрации архитектурных памятников Республики Беларусь с использованием «Золотых пропорций», что позволит создать единое представление об этнографических и археологических особенностях нашей культуры.

Литература

1. Журнал «Квант». – 1973. № 8.
2. Д.Пидоу. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1989.
3. Ковалёв Ф.В. Золотое сечение в живописи. К.: Высшая школа, 1989.
4. Цеков-Карандаш Ц.О., О втором золотом сечении. – София, 1983.
5. Ткачев М.А., Замки Беларуси.
6. Стахов А., Коды золотой пропорции.

Критерий конечности и асимптотика коразмерностей обобщенных тождеств[3]

Гордиенко Алексей Сергеевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, г. Москва, Россия

gordienko_a_s@mail.ru

В начале 80-х годов в теории полиномиальных тождеств зародилось и стало бурно развиваться новое направление, связанное с исследованием числовых характеристик многообразий алгебр. Были сформулированы гипотезы С.А. Амицура и А. Регева. Гипотеза Амицура об асимптотическом поведении обычных коразмерностей была доказана в 1999 году М.В. Зайцевым и А. Джамбруно [1] для всех ассоциативных алгебр. Для широкого класса алгебр была доказана и гипотеза Регева [2]. Кроме обычных тождеств, важную роль в теории колец играют и обобщенные полиномиальные тождества [3]. В связи с этим возникает вопрос о справедливости указанных гипотез для обобщенных коразмерностей.

Далее через A мы везде будем обозначать произвольную ассоциативную алгебру над некоторым полем F характеристики 0. Пусть $F\langle X\rangle$ — свободная алгебра без 1 на счетном

[3] Работа поддержана грантами РФФИ №06-01-00485 и НШ-1983.2008.1

множестве $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ над полем F. Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle *_F A$ называется *обобщенным тождеством* алгебры A, если $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для всех $a_i \in A$, $1 \le i \le n$. (Здесь знаком $*$ обозначено свободное произведение алгебр.) Понятно, что множество $GId(A)$ всех обобщенных тождеств алгебры A образует идеал алгебры $F\langle X \rangle *_F A$.

Пусть $V_n(A) = \langle a_0 x_{\sigma(1)} a_1 x_{\sigma(2)} a_2 \ldots a_{n-1} x_{\sigma(n)} a_n \mid \sigma \in S_n, a_i \in A \cup \{1\} \rangle_F$, $n \in N$. Элементы пространства $V_n(A)$ называются *обобщенными полилинейными многочленами* с коэффициентами в алгебре A. Последовательность $gc_n(A) = \dim \dfrac{V_n(A)}{V_n(A) \cap GId(A)}$, $n \in N$, назовем *последовательностью обобщенных коразмерностей* алгебры A.

Теорема 1. Пусть $A = I + J$ — сумма идеалов, $\dim_F I < \infty$, а J — нильпотентен. Тогда существуют такие $n_0 \in N$, $C \in Q_+$, $r \in Z_+$, что $gc_n(A) < \infty$ при $n \ge n_0$ и $gc_n(A) \sim Cn^r d^n$ при $n \to \infty$, $d = PI\exp(A) \in Z_+$.

Теорема 2. Если $gc_n(A) < \infty$ для некоторого $n \in N$, то $A = I + J$ для некоторых идеалов I и J, причем $\dim_F I < \infty$, а J — нильпотентен.

Следствие. Если A — ассоциативная алгебра над некоторым полем F характеристики 0, то для обобщенных тождеств такой алгебры выполняются гипотезы С.А. Амицура и А. Регева.

Литература

1. Zaicev M.V., Giambruno A. Polynomial identities and asymptotic methods. AMS Mathematical Surveys and Monographs Vol. 122, Providence, R.I., 2005, 352 pp.
2. Berele A., Regev A. Asymptotic behaviour of codimensions of p.i. algebras satisfying Capelli identities // Trans. Amer. Math. Soc., V. 360 (2008), pp. 5155-5172.
3. Beidar K.I., Martindale W.S., Mikhalev A.V. Rings with generalized polynomial identities. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996, xiv+522 pp.

Управление запасами в системе с несколькими поставщиками

Громов Александр Николаевич

Студент Механико-математического факультета

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия

gromovaleksandr@gmail.com

Производственная цепь рассматривается с точки зрения производителя конечной продукции, реализующего производство продукции и управление запасами так, чтобы минимизировать сумму средних издержек на хранение и издержек дефицита продукции. Также в системе присутствует некоторое число N поставщиков материалов, необходимых для производства продукции. Производителю поступают случайные требования от покупателей, и также случайным предполагается время доставки материалов от поставщиков. Производство продукции начинается непосредственно в момент поступления заказов, то есть рассматривается make-to-order стратегия. Также производитель использует (S-1,S) политику управления запасами.

Обозначим I(t) текущий уровень запасов производителя, h – издержки на хранение единицы продукта и b – издержки дефицита продукции. Запросы от покупателей случайны, единичны и поступают в соответствии с пуассоновским процессом интенсивности λ. Производитель обслуживает их немедленно, если $I(t) \ge 0$. Но как в случае $I(t) \ge 0$, так и в случае $I(t) < 0$, для пополнения запасов он отправляет соответствующий запрос i-му поставщику с вероятностью α_i, удовлетворяющей неравенству $0 \le \alpha_i \le 1$, при этом $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$.

Работа направлена на определение (в стационарном режиме) оптимальных параметров α_i, минимизирующих следующую функцию издержек

$$C(\alpha_1,\dots,\alpha_N) = E(h(I)^+ + b(I)^-).$$

Стратегия каждого поставщика реализуется как M/G/1 очередь (в отличие от [1], где рассматривались M/M/1 очереди) с вероятностью поступления запроса, равной $\alpha_i\lambda$, и политикой обслуживания First-In-First-Out (обслуживание требований в порядке поступления). Таким образом, изучается система из N независимых M/G/1 очередей.

В работе методом Лагранжа классического вариационного исчисления получено выражение для оптимальных вероятностей $\alpha_1,\dots,\alpha_N$. Полученные формулы реализованы на конкретных числовых значениях в среде Maple.

Литература

1. Arda, Y., Hennet, J.C., 2004. Inventory control in a multi-supplier system, Int. J. Production Economics 104 (2006) 249-259.

Метод конечных разностей для решения системы уравнений динамики приливов[4]

Друца Александр Валерьевич

Студент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, г. Москва, Россия

dav-school@yandex.ru

Численное решение системы уравнений мелкой воды, описывающей динамику приливных волн в океане, имеет важное значение как для задания граничных условий на поверхности океана, так и самостоятельное значение. При этом большинство численных методов было основано на аппроксимации задачи конечными разностями с использованием равномерной сетки. В то же время, существуют задачи, в которых область требуется аппроксимировать неравномерной сеткой. Как правило, такая сетка является неструктурированной.

Аппроксимация этой задачи при помощи классических конечных элементов сводит задачу к конечномерной, в которой отсутствует сохранение баланса на ячейке. Это приводит к тому, что через некоторое время получаемое в результате расчета решение существенным образом отличается от решения дифференциальной задачи. Ранее задача аппроксимировалась неконформными конечными элементами Равьяра-Тома, что позволило обеспечить сохранение баланса на ячейке. Проведенные численные эксперименты показали эффективность такого подхода для решения уравнений динамики приливов. В то же время возник вопрос, а нельзя ли построить конечно-разностную аппроксимацию исходной задачи на неструктурированной сетке, обладающую теми же свойствами, что и конечномерная задача, которая получилась в результате аппроксимации с использованием элементов Равьяра-Тома.

В данной работе приводится разностная схема, аппроксимирующая уравнения мелкой воды на неструктурированной сетке в предположении, что все треугольники сетки являются остроугольными или прямоугольными. При этом треугольник, имеющий общей стороной с прямоугольным треугольником его гипотенузу, обязан быть остроугольным. Отметим, что данное требование является естественным. Для системы уравнений Навье-Стокса похожая аппроксимация была построена в работе [4]. Возникающая при этом система алгебраических

[4] Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 08-01-00415) и Программы РАН "Современные проблемы теоретической математики" (проект "Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики")

уравнений обладает тем свойством, что после исключения части неизвестных матрица системы становится М-матрицей. Это означает, что для решения системы могут быть использованы все итерационные методы, что и для систем с М-матрицей.

Литература

1. Марчук Г.И., Каган Б.А. Океанские приливы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1977.
2. Bogachev K.Yu., Kobelkov G.M. Numerical solution of a tidal wave problem. – in Proceedings of "Parallel Computational Fluid Dynamics", v.2, 2004, J.-Wiley Press.
3. Agoshkov V.I., Botvinovsky E.A. Numerical solution of a hyperbolic-parabolic system by splitting methods and optimal control approaches. – Comp. Methods in Appl. Mathematics, v. 7, No. 3, 2007, 193-207.
4. Popov I.V., Fryazinov I.V., Stanichenko M.Yu., Taimanov A.V. Construction of a difference scheme for Navier–Stokes equations on unstructured grids. – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v.23, No. 5, 487-503.

Существование “в целом” и единственность решения системы уравнений крупномасштабной динамики океана в области с неровным дном

Друца Алексей Валерьевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
ay-prog@yandex.ru

Без дополнительных предположений о малости исходных данных доказана теорема существования и единственности обобщенного решения системы уравнений, описывающих динамику океана, для произвольного промежутка времени $[0,T]$ в пространственной области $\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \Omega', z \in [0, H(x,y)]\}$, где $H \in C^2(\Omega')$ – глубина, положительная ограниченная функция двух переменных, отделенная от нуля, Ω' – двумерная ограниченная область с границей, состоящей из конечного числа гладких дуг, пересекающихся под ненулевыми углами. А именно, доказано, что для произвольного промежутка времени $[0,T]$, любых коэффициентов вязкости $\nu, \nu_1 > 0$, любой глубины $H \in C^2(\Omega'), H \ge H_0 > 0$ и любых начальных условий $\hat{u}_0 = (u_1, u_2) \in W_2^2(\Omega)$, $\int_0^1 (\partial_1 (Hu_1) + \partial_2 (Hu_2))\, ds = 0$, $\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$, $s = zH^{-1}(x,y)$ существует единственное обобщенное решение $(\hat{u}, \rho)$, причем $\hat{u}_s \in W_2^1(Q_T), \rho_s \in W_2^1(Q_T)$ и нормы $\|\nabla \hat{u}\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\nabla \rho\|_{L_2(\Omega)}$ непрерывны по t.

Литература

1. G.M. Kobelkov, Existence of a solution ”in the large” for ocean dynamics equations, J. math. fluid mech., 9, pp. 588–610, 2007.
2. Lions J.L., Temam R., Wang S, On the equations of the large-scale ocean, Nonlinearity, 5, pp. 1007-1053, 1992.
3. R.Temam, M.Ziane, Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics, Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, vol. 3, S. Frielander and D. Serr Eds, Elsevier, pp. 535-658, 2004.
4. G.I. Marchuk, A.S. Rusakov, V.B.Zalesny, and N.A Diansky, Splitting Numerical Technique with Application to the High Resolution Simulation of the Indian Ocean Circulation, Pure appl. Geophys., V. 162, pp. 1407-1429, DOI 10.1007/s00024-005-2677-8, 2005.

5. V.B. Zalesny, Mathematical model of sea dynamics in a sigma-coordinate system, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, V. 20, N.1, pp. 97-113, 2005.
6. С.Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, "Наука", Москва, 1988.
7. С.А.Назаров, Б.А.Пламеневский, Эллиптическе задачи в областях с кусочно гладкой границей, "Наука", Москва, 1991.

О вероятности выхода броуновского движения и броуновского моста на прямолинейные границы

Житлухин Михаил Валентинович

Студент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

zhitlukhin@gmail.com

Пусть $B=(B_s)_{s\geq 0}$ – стандартное броуновское движение, b>0>d, a, c – произвольные константы. Определим вероятности

$$F_{t,x} = P\{\sup_{s\leq t}(B_s - as) \leq b, \inf_{s\leq t}(B_s - cs) \geq d \mid B_t = x\},$$

$$G_t = P\{\sup_{s\leq t}(B_s - as) \leq b, \inf_{s\leq t}(B_s - cs) \geq d\}.$$

Эти вероятности можно рассматривать как вероятности того, что график броуновского моста или броуновского движения на заданном отрезке времени находится внутри области, ограниченной прямолинейными границами.

В данной работе с помощью так называемого «мартингального» метода доказывается следующая теорема о явном виде этих вероятностей.

Теорема. Для любого t в случае a≥c и для t<(b-d)/(c-a) в случае a<c и любого $x \in [at+b, ct+d]$ вероятности $F_{t,x}$ и G_t задаются формулами

$$F_{t,x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2k^2(b-d)}{t}(b-d+(a-c)t) - 2k\left(bc - ad - \frac{(b-d)x}{t}\right)\right\} -$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2}{t}(k(b-d)+b)(k(b-d+(a-c)t)+b+at-x)\right\},$$

$$G_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-2k^2(b-d)(a-c)-2k(bc-ad)} \int_{ct+d}^{at+b} e^{-(y-2k(b-d))^2/(2t)} dy -$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-2(k(b-d)+b)(k(a-c)+a)} \int_{ct+d}^{at+b} e^{-(y-2(k+1)b+2kd)^2/(2t)} dy.$$

Литература

1. L. Barba Escriba, A Stopped Brownian Motion Formula with Two Sloping Line Boundaries, The Annals of Probability, vol. 15, num. 4 (1987), 1524-1526.
2. D. Revuz, M.Yor. Continuous martingales and Brownian motion, 3rd. ed., Springer-Verlag, Berlin (1999).
3. M.Teunen, M. Goovaerts, Double Boundary Crossing Result for the Brownian Motion, Scandinavian Actuarial Journal, vol. 2 (1994), 139-150.

О проблеме А-полноты в классе дефинитных автоматов.

Жук Дмитрий Николаевич
аспирант
Механико-математический факультет
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
zh_dmitriy@mail.ru

В работе рассматриваются системы вида $M = F \cup \nu$, где F – некоторый класс Поста, а ν – конечная система дефинитных автоматов. Исследуется задача об А-полноте относительно операции суперпозиции для таких систем автоматов. Все классы Поста были разделены на сильные и слабые по их способности гарантировать разрешимость проблемы А-полноты.

Пусть P_2 – множество всех булевых функций. Рассмотрим конечные автоматы, имеющие ровно 1 выход и получающиеся при помощи операции суперпозиции из элементов, являющихся функциями из P_2 или единичной задержкой с начальным состоянием 0 или 1. Такие автоматы будем называть дефинитными. Ясно, что каждой булевой функции из P_2 соответствует дефинитный автомат. Пусть

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_2x_3x_4$$

$$h_3*(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4 .$$

Пусть F – замкнутый класс булевых функций. Определим проблему А-ПОЛНОТА(F): дана конечная система ν дефинитных автоматов; требуется установить, А-полна ли система $F \cup \nu$.

ТЕОРЕМА. Проблема А-ПОЛНОТА(F) алгоритмически разрешима точно тогда, когда для какого-то $f \in \{h_2, h_3, h_3*, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ выполняется $f \in F$.

Литература

1. Post E. Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
2. Бабин Д.Н. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты // Доклады Академии наук №4. Т. 367. 1999. С. 439-441.
3. Буевич В.А., Клиндухова Т.Э. Об алгоритмической неразрешимости задач об А-полноты для дефинитных ограниченно-детерминированных функций. Москва, Математические вопросы кибернетики.
4. Жук Д.Н., Присмотров Ю.Н. О проблеме полноты в классе автоматов без обратной связи. Москва, Интеллектуальные системы, т. 11, 2007.
5. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Наука, Москва, 1985.

О числе решений некоторых систем алгебраических уравнений

Зайцева Анастасия Николаевна[5]
Студентка
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет, Москва, Россия
zayaz_a@mail.ru

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Классическая теорема Безу утверждает, что если количество решений системы однородных алгебраических уравнений

[5] Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. Нестеренко Ю.В. за помощь в проведении исследования.

$$F_1(\overline{X}) = ... = F_n(\overline{X}) = 0,$$

где $F_i(\overline{X}) \in K[x_0,...,x_n]$, конечно, то оно не превосходит произведения степеней форм $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

В докладе мы рассматриваем системы алгебраических уравнений, однородных по нескольким группам переменных и оцениваем количество решений в предположении, что оно конечно.

Теорема: Пусть множество решений $(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n) \in P_K^1 \times ... \times P_K^1$ системы алгебраических уравнений

$$F_1(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n) = 0,\ \ldots\ , F_m(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n) = 0, \qquad F_i(\overline{X}_1,...,\overline{X}_n) \in K[x_0^1, x_1^1, ..., x_0^n, x_1^n],$$

конечно. Если степени всех уравнений по каждой из групп переменных одинаковы, т.е. $\deg_{X_j} F_i = d_j$, при всех возможных индексах i, j то число решений этой системы не превосходит $n! \cdot d_1 \cdots d_n$.

Сформулированное утверждение сводится к оценке числа нулей мультиоднородных нульмерных идеалов. В 1986 году П.Филиппон, [1], доказал общую теорему о числе нулей многочленов на алгебраических группах. При этом использовались свойства многочлена Гильберта мультиоднородных идеалов. В доказательстве теоремы мы применяем одну из центральных лемм работы [1]. Кроме того используется мультиоднородное обобщение свойств функции Гильберта нульмерных идеалов, доказанное в работе Ван-Туйля, [2].

Литература

1. Philippon P. (1986) Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs // Bulletin de la Société mathématique de France, 114, p. 355-383.
2. Van Tuyl A. (2002) The border of the Hilbert function of a set of points in $P^{n_1} \times \cdots \times P^{n_k}$ // JPAA ,176, p. 223-247.
3. Cox D., Little J., O'Shea D. (1997) Ideals, Varieties, and Algorithms // Springer-Verlag New York.

Вероятность выживания частиц в источнике для одной модификации критического ветвящегося случайного блуждания по двумерной решетке

Захарьева Екатерина Владимировна

Студентка

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия

ekaterina-zakharyeva@yandex.ru

Рассмотрим модификацию ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем по двумерной целочисленной решетке, имеющей источник ветвления (т.е. источник размножения и гибели частиц) в начале координат. Отличительной особенностью данной модели является введение параметра α, управляющего поведением процесса в источнике и при этом нарушающего симметричность матрицы интенсивностей переходных вероятностей случайного блуждания. Такая модель впервые была рассмотрена в статье [1] для критического ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}$.

Обозначим $\zeta(t)$ число частиц в начале координат в момент времени t. Целью настоящей работы является исследование асимптотического поведения вероятности $q(t) := P(\zeta(t) > 0)$ на $\mathbf{Z}^2$. Перейдем к описанию процесса. Пусть в момент времени $t = 0$ в начале координат находится одна частица. Вне начала координат случайное блуждание предполагается симметричным, однородным, регулярным, неприводимым, с конечной дисперсией скачков и задается матрицей переходных интенсивностей $A = \| a(x,y) \|_{x,y \in Z^2}$. Находясь в нуле, частица может либо перейти в произвольную точку решетки $y \neq 0$ с вероятностью $-(1-a)a(0,y)a^{-1}(0,0)$, либо умереть с вероятностью α, произведя перед гибелью случайное число потомков. Ветвление частиц задается производящей функцией $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k$. Предполагается, что производящая функция задает критический ветвящийся процесс в источнике ($f'(1) = 1$), и при этом $f''(1) < \infty$. Новые частицы эволюционируют по такому же закону независимо друг от друга и от всей предыстории.

Основной результат настоящей работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема. *При $t \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$q(t) \sim Ct^{-1},$$

где константа C определяется в явном виде с помощью параметров модели.

Основной идеей доказательства является переход от ветвящегося случайного блуждания к ветвящемуся процессу с двумя типами частиц: в начале координат и вне его. При таком подходе стандартным способом выписываются уравнения для производящих функций ветвящегося процесса [3]. На основании этих уравнений выводится интегральное уравнение для $q(t)$, а также находятся первый и второй факториальные моменты случайной величины $\zeta(t)$. С помощью факториальных моментов и интегрального уравнения получены оценки для $q(t)$, с использованием которых определяется асимптотическое поведение вероятности выживания частиц в источнике ветвления.

Литература

1. Topchii V., Vatutin V., Yarovaya E. (2003) Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. Teor.Jmovirn. ta Matem. Statist, N.69, p.158-172.
2. Яровая Е.Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: МГУ, 2007, 104 с.
3. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.

Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений с нелипшицевой диффузией и с пуассоновской мерой

Зубченко Владимир Петрович

Аспирант механико-математического факультета

Киевского национального университета имени Т.Г.Шевченка, Киев, Украина

v_zubchenko@ukr.net

Исследование стохастических дифференциальных уравнений с нелипшицевыми коэффициентами представляет особый интерес для моделирования процентных ставок безрисковых активов, так как одним из наиболее важных заданий банковских организаций и страховых компаний является контроль риска, вызываемого колебаниями процентной ставки. Однако реальные рынки функционируют таким образом, что процентные ставки в определенные моменты времени имеют прыжки. В связи с этим рассмотренные нами вопросы существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений с нелипшицевой диффузией и с пуассоновской мерой, которые позволяют моделировать процентные ставки таких финансовых рынков, имеют практическую необходимость и важное теоретическое значение. Также мы обобщили стохастическую модель Кокса-Ингерсолла-Росса [1], исследовали вопросы сходимости долгосрочной процентной ставки, рассмотрели обобщение двухфакторной стохастической модели.

Исследуем стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = a(X(t))dt + g(X(t))dW(t) + \int_{\mathrm{R}} q_1(X(t),y)\tilde{\nu}(dt,dy) + \int_{\mathrm{R}} q_2(X(t),y)\mu(dt,dy). \qquad (1)$$

где $W(t)$ – винеровский процесс; $\tilde{\nu}(dt,dy)=\nu(dt,dy)-\Pi(dy)dt$ – центрированная пуассоновская мера, $\nu(dt,dy)$ - пуассоновськая мера, $E\nu(dt,dy)=\Pi(dy)dt$; $\mu(dt,dy)$ - нецентрированная пуассоновськая мера, $E\mu(dt,dy)=m(dy)dt$; $\Pi(\cdot)$ - сигма-конечная, $m(\cdot)$ - конечная мера на σ-алгебре борелевских множеств R. $a(x)$, $g(x)$, $q_1(x,y)$, $q_2(x,y)$ - неслучайные измеримые функции.

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполняются следующие условия: функции* $a(x)$, $g(x)$, $\int_{\mathrm{R}}|q_1(x,y)|^2\,\Pi(dy)$ *- ограничены;* $q_2(x,y)$ *непрерывна по* x *по мере* $m(dy)$; $\lim_{x\to y}\int_{\mathrm{R}}|q_1(x,\theta)-q_1(y,\theta)|^2\,\Pi(d\theta)=0$; *существует строго возрастающая функция* $\rho(u)$ *на* $[0,\infty)$, *такая что* $\rho(0)=0$, $\int_{0+}\rho^{-2}(u)du=\infty$ *и* $|g(x)-g(y)|\le\rho(|x-y|)$ *для всех* $x,y\in\mathrm{R}$; $|a(x_1)-a(x_2)|\le k|x_1-x_2|$, $\int_{\mathrm{R}}|q_1(x_1,y)-q_1(x_2,y)|\,\Pi(dy)\le k|x_1-x_2|$ *для всех* $x_1,x_2\in\mathrm{R}$. *Тогда существует единственное сильное решение уравнения (1).*

Мы также доказали, что из потраекторной единственности и существования слабого решения стохастического дифференциального уравнения по винеровскому процессу и пуассоновской мере следует существование сильного решения данного уравнения.

Рассматриваем обобщение CIR-модели и поведение долгосрочной ставки $\frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds$.

Теорема 2. Пусть случайный процесс $X(t)$ удовлетворяет стохастическое уравнение

$$dX(t)=(2\beta X(t)+\delta(t))dt+g(X(t))dW(t)+\int_{\mathrm{R}}q(X(t),y)\tilde{\nu}(dt,dy),\ \forall t\in\mathrm{R}_+$$

где $\beta<0$; $g(0)=0$, $q(0,y)=0$ $\forall y\in\mathrm{R}$; $\delta(t)$ - ограничена; $|g(x_1)-g(x_2)|^2\le b|x_1-x_1|$ и $\int_{\mathrm{R}}|q(x_1,y)-q(x_2,y)|^2\,\Pi(dy)\le b|x_1-x_2|$ для всех $x_1,x_2\in\mathrm{R}$; $\int_{\mathrm{R}}q^4(x,y)\Pi(dy)\le bx^2$ $\forall x\in\mathrm{R}$; $\frac{1}{t}\int_0^t\delta(s)ds\to\bar{\delta}$. Тогда $\frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds\to\dfrac{\bar{\delta}}{-2\beta}$ с вероятностью 1 при $t\to\infty$.

Литература

1. Zubchenko, V. (2007) Long-term returns in stochastic interest rate models // Theory of Stochastic Processes, **13 (29)**, 4, pp. 247-261.

Ортогональные подмножества систем корней и метод орбит

Игнатьев Михаил Викторович[6]
Аспирант Механико-математического факультета
Самарский государственный университет, Самара, Россия
mihail.ignatev@gmail.com

Пусть Φ – приведённая система корней, *p* – простое число, достаточно большое по сравнению с рангом Φ, *k* – алгебраическое расширение поля из *p* элементов, *G* = *G*(Φ, *k*) – (односвязная) группа Шевалле с системой корней Φ над полем *k*. Обозначим через *U* максимальную унипотентную подгруппу в *G*, соответствующую множеству положительных корней Φ^+, а через **u** – её алгебру Ли.

Группа *U* действует на **u** с помощью присоединённого представления; сопряжённое представление в пространстве **u*** называется *коприсоединённым*. Метод орбит гласит, что в случае конечного поля неприводимые конечномерные комплексные представления группы *U* находятся во взаимно однозначном соответствии с коприсоединёнными орбитами, причём многие задачи теории представлений можно решать в терминах орбит [1, 5]. Задача полной классификации орбит коприсоединённого представления не решена до сих пор и

[6] Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору А.Н. Панову за постановку задачи и внимание к работе

представляется *чрезвычайно* сложной; в то же время, известно описание многих важных классов орбит (см., например, [4]).

С любым ортогональным (то есть состоящим из попарно ортогональных корней) подмножеством D в Φ^+ и с произвольным набором ненулевых констант ξ из поля k можно естественным образом связать коприсоединённую орбиту Ω; мы будем говорить, что она *ассоциирована* с D. Примерами являются регулярные и субрегулярные орбиты в случае $\Phi = A_n$, а также элементарные орбиты для любой системы корней Φ.

Мы доказываем, что размерность Ω (в случае алгебраически замкнутого поля) не зависит от набора ξ и ограничена сверху числом, зависящим только от подмножества D. Более точно, пусть W – группа Вейля системы корней Φ и σ – инволюция (элемент второго порядка) в W, равная произведению отражений, соответствующих корням из D. Пусть, далее, $l(\sigma)$ – длина σ как элемента группы Вейля (то есть длина самого короткого разложения σ в произведение простых отражений), а $s(\sigma) = |D|$.

Теорема. *Пусть Ω – орбита, ассоциированная с ортогональным подмножеством D и набором ненулевых констант ξ (поле k алгебраически замкнуто). Тогда* $\dim \Omega$ *не зависит от набора ξ и не превосходит числа $l(\sigma) - s(\sigma)$.*

Доказательство основано на индукции по рангу системы корней Φ. (Отметим, что для случая $\Phi = A_n$ более сильный результат был получен А.Н. Пановым в [6]).

Отметим, что оценка на размерность во многих случая является точной. Кроме того, для классических систем корней удаётся выяснить, *на сколько именно* $\dim \Omega$ отличается от $l(\sigma) - s(\sigma)$, а также построить поляризацию для канонической формы на Ω [2, 3].

Литература

1. Kazhdan D. Proof of Springer's hypothesis. Israel J. Math., v. **28**, 1977, p. 272-286.
2. Игнатьев М.В. Базисные подсистемы в системах корней Bn и Dn и ассоциированные коприсоединённые орбиты. Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, № **3**(**62**), 2008, с. 124-148.
3. Игнатьев М.В. Ортогональные подмножества классических систем корней и коприсоединённые орбиты унипотентных групп. Мат. заметки, to appear.
4. Игнатьев М.В., Панов А.Н. Коприсоединённые орбиты группы UT(7, K). Фунд. и прикл. матем., т. **13**, вып. **5**, 2007. Электронная версия arXiv: math.RT/0603649.
5. Кириллов А.А. Лекции по методу орбит. – Новосибирск: ИДМИ, 2002.
6. Панов А.Н. Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединённые орбиты. Зап. научн. семн. ПОМИ, т. **349**, 2007, с. 150-173. Электронная версия arXiv: math.RT/0801.3022.

Перенормировка для локального времени самопересечения случайных процессов

Изюмцева Ольга Леонидовна

Аспирантка

Институт математики Национальной Академии Наук Украины, Киев, Украина

olaizyumtseva@yahoo.com

Определение 1. Локальным временем самопересечения (ЛВС) для ξ в R^n на [0;1] называется $T_\xi^{\,0} = \int_0^1\int_0^{s_2} \delta_0(\xi(s_2) - \xi(s_1))ds_1ds_2$, где δ_0 -дельта–функция в точке 0.

Пусть $T_\xi^{\,\varepsilon} = \int_0^1\int_0^{s_2} f_\varepsilon(\xi(s_2) - \xi(s_1))ds_1ds_2$, $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}}$.

Формально $L_2 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}[T_\xi^{\,\varepsilon} - a_\varepsilon] = T_\xi^{\,o}$

Определение 2. a_ε -перенормировка для ЛВС ξ.

Пусть ξ -диффузионный процесс в R^2:

$$\begin{cases} d\xi(s) = a(\xi(s))ds + B(\xi(s))dw(s) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases}.$$

Лемма 1. $ET_\xi^\varepsilon \sim \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\varepsilon}E\int_0^1 \frac{1}{\left|\det B(\xi(s))\right|}ds$, $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 1. Существует $L_2 - \lim_{\varepsilon\to 0+}[T_\xi^\varepsilon - ET_\xi^\varepsilon]$.

Для $\xi(t) = F(w(t))$, где $F : R^2 \to R^2(w(t))$:

1) $\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \le \left|\det F'\right| \le c_2$;

2) для ς в R^2 с плотностью $p(x) = \frac{c}{1+\|x\|^4}$, характеристическая функция $F(\varsigma)$, интегрируемая с квадратом.

Пусть $M = \{(u,v) : F(u) = F(v)\}$, $\gamma_\varepsilon = E\int_t^1\int_0^t\int_M f_\varepsilon(w(s_1)-u)(w(s_2)-v)\sigma(du,dv)ds_1ds_2$, где σ – поверхностная мера на M.

Теорема 2. Существует $\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0+}\gamma_\varepsilon$

Пусть w – винеровский процесс в R^3, χ -обобщенная функция медленного роста порядка m.

Теорема 3. Существует $q_0 > 0$: для $p > q_0$ функционал

$$\int_0^t\int_0^{s_2}(\chi(w(s_2)-w(s_1))ds_1ds_2 - \sum_{k=0}^{3m+1}\sum_{k_1+k_2+k_3=k} I_{k_1,k_2,k_3}\ (a_{k_1,k_2,k_3}(s_1,s_2)))ds_1ds_2$$

является элементом пространства обобщенных винеровских функционалов порядка p.

Литература

1. Дороговцев А.А., Бакун В.В. (2003) Обобщенные функционалы от винеровского процесса // Теория вероятностей и ее применение, № 48(1), с.43-61.
2. Dynkin E.B. (1988) Regularized self-intersection local times of planar Brownian motion // The Annals of Probability, № 1, p. 58-74.
3. Izyumtseva O.L. (2008) The constant of renormalization for self-intersection local time of diffusion process in the plane // Ukrainian Mathematical Journal № 60(11), p.1489-1499.

О порядке приближения средними Зигмунда на классах E_p[e]

Иофина Татьяна Владимировна[7]

Студентка

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского, механико-математический факультет, Саратов, Россия

iofinat@mail.ru

Пусть $\{p_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbf{N}$ такова, что $2 \le p_i \le N$ для всех $i \in \mathbf{N}$, $m_0 = 1$, $m_n = p_1p_2...p_n$ при $n \in \mathbf{N}$. Каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение $x = \sum_{i=1}^\infty x_i / m_i$, $0 \le x_i < p_i$, $x_i \in \mathbf{Z}$ (см. [1]). Для $k = \sum_{i=1}^\infty k_i m_{i-1}$, $0 \le k_i < p_i$, $k_i \in \mathbf{Z}$, $i \in \mathbf{N}$ положим по определению $\chi_k = \exp\left(2\pi i\sum_{j=1}^\infty k_j x_j / p_j\right)$,

[7] Автор выражает признательность доценту к. ф.-м. н. Волосивцу С.С. за постановку задачи и помощь в подготовке тезисов

$x \in [0,1)$. В [1] показано, что система $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ полна и ортонормированна на $[0,1)$. Это позволяет определить коэффициенты Фурье $\hat{f}(k)$. По определению, средние Зигмунда есть $z_{n,k}(f,x) = \hat{f}(0) + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - i^k / n^k\right) \hat{f}(i) \chi_i(x)$, где $f \in L[0,1)$, $k, n \in \mathbf{N}$. Пусть $P_n = \{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k : a_k \in \mathbf{C}\}$, $E_n(f)_p = \inf\{\| f - t_n \|_p : t_n \in P_n\}$, где $\|f\|_p = \left(\int_0^1 | f(t) |^p \, dt\right)^{1/p}$ при $1 \le p < \infty$ и $\|f\|_\infty = \sup\{| f(t) | : t \in [0,1)\}$. Через $C^*[0,1)$ обозначим пространство P-непрерывных на [0,1) функций (см. [1, §1,2]). Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая к нулю последовательность, $E_p(\varepsilon) = \left\{f \in L_p : E_n(f)_p \le \varepsilon_n\right\}$, $1 \le p \le \infty$ (при $p = \infty$ $f \in C^*[0,1)$).

Будем писать $A_n \succ\prec B_n$, если существуют $C_1, C_2 > 0$ такие, что $C_1 A_n < B_n < C_2 A_n$.

Теорема 1. Пусть $f \in L_p[0,1)$ $1 < p < \infty$, $n, k \in \mathbf{N}$, тогда

$$\sup\left\{\left\|f - z_{n,k}(f)\right\|_p : f \in E_p(\varepsilon)\right\} \succ\prec n^{-k} \left(\sum_{i=1}^{n} i^{sk-1} \varepsilon_i^s \right)^{1/s}, \text{ где } s = \min\{2, p\}.$$

Теорема 2. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1} \varepsilon_n < \infty$, $1 \le p < \infty$. Тогда любая функция $f \in E_p(\varepsilon)$, эквивалентна (равна п.в.) $\psi \in C^*[0,1)$, и при этом

$$\sup\left\{\left\|\psi - z_{n,k}(\psi)\right\|_\infty : f \in E_p(\varepsilon)\right\} \succ\prec \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{1/p-1} \varepsilon_i + n^{-k} \sum_{i=1}^{n} i^{k+1/p-1} \varepsilon_i .$$

Теоремы 1 и 2 являются мультипликативными аналогами результатов Н.А. Ильясова, полученными в [2], [3].

Литература

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. (1987) Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука.
2. Ильясов Н.А. (1986) Приближение периодических функций средними Зигмунда // Матем. заметки. Т. 39. № 3. С. 367–382.
3. Ильясов Н.А. (2001) О порядке приближения в равномерной метрике средними Фейера-Зигмунда на классах *Ep*[e] // Матем. заметки. Т. 69. № 5. С. 679–687.

Принцип Ванга и проблема сводимости в теории страхования

Ирхина Наталья Александровна[8]
Соискатель
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, г. Москва, Россия
irkhina.natalia@rambler.ru

Расчет премии в страховании является одной из фундаментальных задач актуарной науки. Поиск надежного принципа подсчета премии является предметом многочисленных актуарных исследований, однако вопрос о том, какой именно принцип предпочтителен, все еще не решен. В последние десятилетия особый интерес вызывает так называемый принцип Ванга подсчета премии, формула которого после ряда модификаций выглядит следующим образом: $H_g(X) = \int_{-\infty}^{0} (g(S_X(t)) - 1) dt + \int_{0}^{+\infty} (g(S_X(t))) dt$, где $S_X(t) = P(X > t)$ - функция дожития для риска

[8] Автор выражает признательность доценту к.ф.-м.н. Лебедеву А.В. за руководство в работе, помощь в подготовке тезисов, замечания и предложения.

X , $g:[0,1]\to[0,1]$ – неубывающая функция искажения. Было установлено, что принцип Ванга является надежной мерой риска, обладая рядом важных практических свойств. Однако формула Ванга подсчета премии достаточно громоздкая, а также требует знания всей функции распределения рассматриваемого риска, что не всегда доступно в реальных условиях. Поэтому важной задачей является определить, при каких условиях данный принцип эквивалентен более удобному в применении принципу назначения премии по среднеквадратическому отклонению. Для некоторых классов функций искажения было доказано, что пересечения соответствующих натуральных множеств распределений риска (на которых принцип Ванга и принцип среднеквадратического отклонения оказываются эквивалентны) являются сдвигово-масштабными семействами.

Автор предложит несколько достаточных критериев сводимости принципа Ванга к принципу подсчета премии по среднеквадратическому отклонению. С помощью полученных критериев устанавливается сводимость для следующих классов функций искажения: класс строго возрастающих ломаных; класс склеек двух степенных функций, класс многочленов с графиками, проходящими через точки (0,0) и (1,1), и ряда других специальных классов функций.

Литература

1. Venter G.G. (1991) Premium calculation implications of reinsurance without arbitrage. ASTIN BULLETIN, 1991, Vol.21, pp: 223-230.
2. Wang, S.S. (1995) Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. Insurance: Mathematics and Economics, 1995, 17, pp: 43-54.
3. Wang, S.S. (1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. ASTIN BULLETIN 1996, 26, pp: 71-92.
4. Christofides, S. (1998) Pricing for risk in financial transactions. Proceedings of the GISG/ ASTIN Joint Meeting in Glasgow, Scotland, October, 1998, pp: 62-109.
5. Virginia R. Young. (1999) Discussion of Christofides conjecture regarding Wang's premium principle. ASTIN BULLETIN, 1999, Vol.29, №2, pp: 191-195.
6. Wang Jing-Long. (2000) A note on Christofides' conjecture regarding Wang's premium principle. ASTIN BULLETIN, 2000, Vol.30, №1, pp: 13-17.
7. Xian-Yi Wu. (2001) The natural sets of Wang's premium principle. ASTIN BULLETIN, 2001, Vol.31, №1, pp: 139-145.

Применение метода двудольных множеств событий к решению задачи исследования социально-экономического положения инвалидов края

Камаренцева Мария Леонидовна

Сибирский Федеральный университет

Институт математики

г. Красноярск

Целью данной работы является исследование социально-экономического положения инвалидов по зрению в Красноярском крае и решение задачи ранжирования районов Красноярского края по социально-экономическому положению инвалидов.

Данная задача решается с помощью метода двудольных множеств случайных событий.

Социально-экономическая система районов края представляет собой сложную систему, поведение которой характеризуется разнотипными данными, одни из которых являются числовыми, а другие – множественными. Поэтому для решения задачи исследования и ранжирования будет использован метод двудольных множеств событий, разработанный И.В. Барановой [1]. Основная идея метода заключается в представлении любой сложной системы с помощью двудольной эвентологической модели, в которой каждый элемент системы характеризуется двудольным множеством событий: его первая доля определяется случайными величинами, а вторая – случайными множествами событий. Анализ поведения элементов системы сводится к анализу эвентологических распределений соответствующих им двудольных множеств событий.

Для исследования социально-экономического положения инвалидов в Красноярском крае были использованы статистические данные по показателям, характеризующим социально-экономическое положение инвалидов по зрению за период с 1995 по 2005 гг. Для проведения анализа были выбраны 14 показателей:

1. Всего инвалидов, состоящих на учете
2. Инвалиды 1 группы
3. Инвалиды 2 группы
4. Инвалиды в возрасте 18-60 лет
5. Инвалиды пенсионного возраста (старше 60 лет)
6. Количество инвалидов, подлежащих трудоустройству
7. Всего работающих инвалидов
8. Работающие инвалиды 1 группы
9. Работающие инвалиды 2 группы
10. Работающие в ВОС
11. Работающие на предприятиях
12. Занятые в сельском хозяйстве
13. Обучающиеся в высших и средне-специальных заведениях
14. Количество незрячих специалистов

Литература

1. Воробьев О.Ю., Баранова И.В. Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем. – Красноярск: Институт естественных и гуманитарных наук. 2007. – 132 с.

Башелье-версия «русского опциона» на конечном интервале

Каменов Андрей Александрович
Студент
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет, Москва, Россия
akamenov@gmail.com

Термин "русский опцион" был впервые введен Шеппом и Ширяевым в их работе [1]. В случае бесконечного временного горизонта оптимальное правило остановки формулируется просто: необходимо остановиться, как только разность (или отношение в случае модели Блэка-Шоулза) максимума цены актива к настоящему моменту и текущей цены достигает определённого значения.

В том случае, если временной горизонт конечен (что означает, что остановка наблюдений должна произойти не позже некоторого момента времени T), задача несколько усложняется. Как показано (для случая модели Блэка-Шоулза) в работах [2] и [4], оптимально останавливаться тогда, когда указанная разность (соответственно, отношение) достигает некоторой границы, непрерывно зависящей от времени. Данная работа посвящена исследованию вида этой кривой.

В части 2 получено явное интегральное уравнение, решение которого и дает нам искомую кривую. Хотя для этого уравнения и возможно численно построить приближенное решение, оно достаточно сложно и не поддается решению в явном виде. Более того, из этого уравнения не получается даже получить асимптотическое поведение этой кривой в нуле и на бесконечности. Асимптотика вблизи нуля находится аналогично американскому опциону – рассуждения очень похожи на рассуждения в работе [4] и приведены скорее для полноты изложения. При этом в случае асимптотики на бесконечности, хотя используется такая же главная идея, как и в работе [5], сами рассуждения достаточно сильно от проведенных в этом исследовании отличаются.

Литература

[1] L.Shepp, A.N.Shiryaev. "The Russian option: reduced regret" (Ann. Appl. Prob., 1993, No 3, 631–640).
[2] S.Graversen, A.N.Shiryaev. "An extension of P.Levy's distributional properties to the case of a Brownian motion with a drift"(2000, Bernoulli).
[3] G.Peskir, A.N.Shiryaev. "Optimal Stopping and Free-Boundary Problems"(2006, Birkhäuser).
[4] E.Ekström. "Russian options with finite time horizon".
[5] Bian Bao-jun, Dai Xiao-liang, Yuan Gui-qiu. "Asymptotic Analysis and Numerical Computation of American Option When Expiry Date Runs to Infinity"(Journal of Tongji University, 2005, vol. 33, No 4).

Разностные аппроксимации функционалов типа локального времени от цепей Маркова

Карташов Ю.Н. [9]
Аспирант
Киевского Национального университета имени Т.Г.Шевченко,
Механико-математический факультет, Киев, Украина
kartashov-y@yandex.ru

Исследуется предельное поведение функционалов типа локального времени от процессов $X_n, n \ge 1$ со значениями в локально компактном пространстве $\mathbf{X}$, которые обладают марковским свойством в точках вида k/n и аппроксимируют однородный марковский процесс X. Рассматриваемые функционалы имеют вид

$$\phi_n^{s,t}(X_n) = \sum_{s \le t_{k,n} < t} g_n(X_n(t_{k,n}), X_n(t_{k+1,n})...X_n(t_{k+L,n})), 0 \le s < t, L \in \mathbf{N}, \tag{1.1}$$

где функции $g_n -$ неотрицательные борелевские, а $t_{k,n} = k/n$.

Для функционалов ϕ_n характеристика определяется как

$f_n^{s,t}(x) = E[\phi_n^{s,t}(X_n) \mid X_n(s) = x], s = t_{i,n}, i \in \mathbf{Z}^+, t > s, x \in \mathbf{X}.$ (ср. определение гл. 8[2]).

Теорема. Предположим, что последовательность X_n осуществляет марковскую аппроксимацию однородного марковского процесса X (см. [1]), а последовательность функционалов ϕ_n имеет вид (1.1). Допустим, что выполнены следующие условия:

1. Функции $g_n(\cdot)$ ограничены и равномерно стремятся к нулю: $\sup_{\bar{x} \in \mathbf{X}^L} \| g_n(\bar{x}) \| \to 0, n \to \infty.$
2. Существует функция $f^{s,t}$, которая является характеристикой W-функционала от процесса X, такой что для любого $T > 0$ $\sup_{s = t_{i,n}, t < T, t > s} \| f_n^{s,t} - f^{s,t} \| \to 0, n \to \infty.$
3. Функция $f^{s,t}$ равномерно непрерывна по пространственной переменной, то есть для любого $T > 0$ выполнено $\sup_{0 < s < t < T} | f^{s,t}(\overline{x_1}) - f^{s,t}(\overline{x_2}) | \to 0, \| \overline{x_1} - \overline{x_2} \| \to 0.$

Тогда имеет место сходимость по распределению $\phi^{s,t}(X_n) \Rightarrow \phi^{s,t}(X), (s,t) \in \mathbf{T}$.

Литература

1. Kulik A.M. (2006) Markov Approximation of stable processes by random walks // Theory of stochastic proccesses, 12(28) (2006), № 1-2.

[9] Автор выражает признательность профессору д.ф.-м..н. Кулику А.М. за помощь в подготовке тезисов.

2. Дынкин Е.Б. (1963) Марковские процессы, М: ФизматГиз.
3. Кулик А.М., Карташов Ю.Н. (2007) Принцип инвариантности для аддитивных функционалов от цепей Маркова. // (arXiv:0704.0508v1)
4. Карташов Ю.Н. (2008) Принцип инвариантности для аддитивных функционалов от цепей Маркова. // Теорія ймовірностей та математична статистика, № 77.
5. Кулик А.М., Карташов Ю.Н. (2009) Сходимость разностных аддитивных функционалов при локальных условиях на их характеристики // Украинский математический журнал, № 263.

О сложности представления коллекций языков в конечных автоматах

Кибкало Мария Александровна

Аспирантка

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
mkibkalo@gmail.com

В работе рассматривается случай совместной представимости семейства языков в конечном автомате. Решена задача о нахождении точного значения максимальной сложности семейства конечных языков в зависимости от максимальной длины слова в них.

Пусть $A, B -$ конечные алфавиты, $||A| = N, |B| = M$. Для $k \in Z_+$ определим классы языков $\Lambda_k(A) = \{L \subset A^* | \forall \alpha \in L \Rightarrow |\alpha| = k\}$, $\Lambda_{\le k}(A) = \{L \subset A^* | \forall \alpha \in L \Rightarrow |\alpha| = k\}$.

Определение 1. Пусть $L \subset A^*$ $-$ регулярный язык, $s \ge 2, s \in \mathrm{N}$. **s-коллекцией языка** L назовем семейство языков $\mathrm{T}(L,s) = \{L_0,...,L_{s-1}\}$ таких, что: $L_i \bigcup L_j =$ Ø, $i \le j, i, j = 0,...,s-1$; $\bigcup_{i=1}^{s-1} L_i = L$; $L_0 := A^* \setminus L$.

Определение 2. Конечный инициальный автомат $V_{q_0} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_0)$ **представляет s-коллекцию языка** L $\mathrm{T}(L,s)$ $(V_q \sim \mathrm{T}(L,s))$ **с помощью системы подмножеств выходного алфавита** $\{B_0,..,B_{s-1}\}$, $B_i \subset B$, $B_i \bigcup B_j =$ Ø, $i \le j, i, j = 0,...,s-1$, если $\forall \alpha \in L_i \Rightarrow \psi(q_0, \alpha) \in B_i, i = 0,...,s-1$.

Определение 3. Пусть $N \ge 2, M \ge 2$, $K \subset A^* -$ класс регулярных языков над алфавитом A. **c-сложностью** K назовем $S_{cc}(K,N,M) = \max\limits_{L \in K} \max\limits_{\mathrm{T}(L,M)} \min\limits_{V_q \sim \mathrm{T}(L,M)} S_{ac}(V_q)$, где $S_{ac}(V_q) -$ число состояний в автомате.

Теорема 1. $\forall N \ge 2, M \ge 2, \forall k \ge 1\ \exists p \ge 0$, конечный язык $L \in \Lambda_k(A)$, коллекция $\mathrm{T}(L,s)$ и ИКА $V_q(k,N,M) \sim \mathrm{T}(L,s)$ такие, что:

$$S_{ac}(V_q(k,N,M)) = S_{cc}(\Lambda_k(A), N, M) = \frac{N^{k-p} - 1}{N - 1} + \sum_{i=1}^{p} \left(M^{N^i} - p + 1\right).$$

Следствие 1. $\forall N \ge 2, M \ge 2$ для $S_{cc}(\Lambda_k(A), N, M)$ выполнено

$$\frac{1}{N-1} \cdot \frac{N^k \cdot \log_N M}{k} \lesssim S_{cc}(\Lambda_k(A), N, M) \lesssim \frac{N}{N-1} \cdot \frac{N^k \cdot \log_N M}{k}.$$

Для класса $\Lambda_{\le k}(A)$ получены аналогичные утверждения, найдено точное значение максимальной сложности приведенного ИКА, представляющего коллекцию языка из класса $\Lambda_{\le k}(A)$.

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Наука, Москва, 1985.
2. C.Campeanu, N. Santean, S.Yu, “Minimal Cover-Automata for Finite Languages”, *Proceedings of the Third International Workshop on Implementing Automata* (WIA’98) 1998, 32-42.

Об аксиоматике модальных логик квадратов шкал Крипке с выделенной диагональю

Кикоть Станислав Павлович
Аспирант
МГУ имени М.В.Ломоносова
staskikotx@gmail.com

Мы используем модальный язык $Ml_2^{□}$, содержащий счетное множество пропозициональных переменных PV, булевы логические связки, 2 унарные модальности $□_h$ и $□_v$ и модальную константу □. Шкалой Крипке будем называть набор F=(W, R_h, R_v, □), где R_i □ W x W, □ □ W. Моделью Крипке называется пара (F, □), где оценка □: W x PV □ {0,1} для каждой точки задает, какие переменные в ней истинны. В этом случае говорят, что модель M построена на шкале F. Истинность формулы в точке модели Крипке M определяется стандартным образом, при этом формула □ считается истинной в точности в точках множества □. Если формула □ верна во всех точках всех моделей, построенных на шкале F, то говорим, что □ общезначима на шкале F.

Пусть F = (W, R) множество с бинарным отношением. Через $F^2_{□}$ обозначим шкалу (W x W, R_h, R_v, □), где

$$(a,b)R_h(c,d) \iff aRc \text{ и } b=d;$$
$$(a,b)R_v(c,d) \iff a=c \text{ и } bRd,$$
$$\Delta = \{(a,a) \mid a \in W\}.$$

Пусть C некоторый класс множеств с бинарным отношением. Рассмотрим класс $C^2_{□} = \{ F^2_{□} |$ F лежит в C}. Через Log($C^2_{□}$) обозначим множество формул, общезначимых на всех шкалах класса $C^2_{□}$.

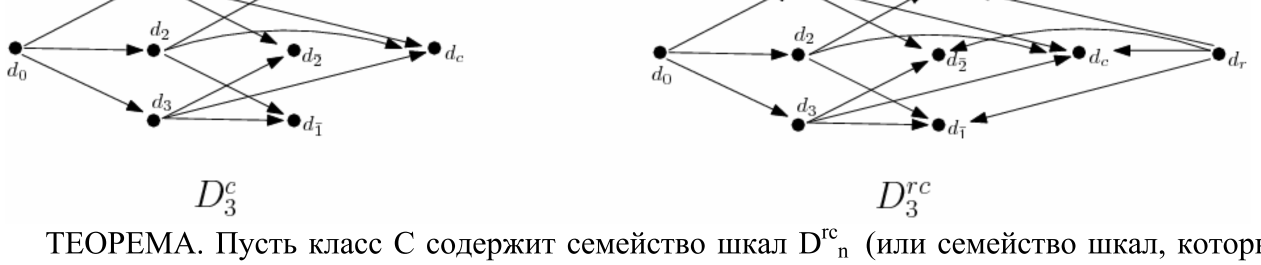
Введем два семейства шкал. Пусть $D_n^c = (W_n^c, R_n^c)$, где

$$W_n^c = \{d_0, d_1, \ldots, d_n, d_{\bar{1}}, \ldots, d_{\bar{n}}, d_c\},$$

$$R = \{(d_0, d_i) | 1 \le i \le n\} \cup \{(d_i, d_{\bar{j}}) | 1 \le i \ne j \le n\} \cup \{(d_i, d_c) | 1 \le i \le c\}.$$

Пусть $D_n^{rc} = (W_n^{rc}, R_n^{rc})$, где

$$W_n^{rc} = W_n^c \cup \{d_r\}, \quad R_n^{rc} = R_n^c \cup \{(d_r, d_{\bar{j}}) | 1 \le j \le n\} \cup \{(d_r, d_c)\}.$$



D_3^c D_3^{rc}

ТЕОРЕМА. Пусть класс C содержит семейство шкал D^{rc}_n (или семейство шкал, которые получены из D^{rc}_n при помощи рефлексивного, транзитивного или рефлексивного замыкания). Тогда Log($C^2_{□}$) не аксиоматизируема никаким множеством □, содержащим лишь конечное число переменных (в стандартной системе, содержащей пропозициональные тавтологии, аксиомы K для $\Box_h$ и $\Box_v$ и правила Modus Ponens, подстановки и введения модальностей).

Дельта-квадратом полной по Крипке логики L (т. е. такой, что L=Log(C) для некоторого класса шкал C) называется логика $\mathrm{Log}(C^2_{\Box})$, где C={F| L общезначима на F}.

СЛЕДСТВИЕ. Дельта-квадраты модальных логик K, D, T, K4, S4 не аксиоматизируемы формулами с конечным числом переменных.

Тестирование модели классической аттенюаторной регуляции

Колобков Дмитрий Сергеевич

Студент

Московский государственного университета имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

dkolobok@list.ru

Способность бактерий адаптироваться к жестким условиям окружающей среды во многом объясняется механизмами регуляции экспрессии генов. В зависимости от внешних условий – температуры, влажности, окружающих клетку веществ – бактерия способна менять уровни экспрессии своих генов в тысячи раз. Например, если окружающая среда богата триптофаном, то клетка уменьшит экспрессию генов триптофанового оперона, вследствие чего в ней будет поддерживаться нормальная концентрация аминокислоты; если через некоторое время концентрация триптофана в окружающей среде снизится, то клетка с помощью того же механизма регуляции вернется на начальный уровень экспрессии. Такой механизм заложен на нуклеотидном уровне – в геноме перед каждым опероном находится относительно короткая область, называемая регуляторной.

Нами широко тестирована модель классической аттенюаторной регуляции, предложенная в [JBCB]. Эта модель в дискретном времени стохастически строит последовательность вторичных структур в «текущем окне» (вероятность образования той или иной вторичной структуры зависит от ее энергии). Границы окна определяются стохастически движущимися рибосомой и РНК-полимеразой, причем скорость второй из них зависит от текущей вторичной структуры, а скорость рибосомы от концентрации аминокислоты или связанного с ней вещества, возникающего в результате считывания регулируемого оперона. При низкой концентрации аминокислоты рибосома долго «ждет» на соответствующих этой аминокислоте (регуляторных) кодонах – и вторичная структура мало задерживает полимеразу, в результате ген экспрессируется. Если концентрация велика, то рибосома движется по регуляторным кодонам быстро – и образуется вторичная структура, сильно тормозящая полимеразу и увеличивающая вероятность ее срыва, что приводит к несчитыванию гена.

Модель тестировалась на многочисленных последовательностях регуляторных областей генов бактерий из разных таксономических групп, и в подавляющем большинстве случаев показала результаты, совпадающие с экспериментальными или другими независимыми данными. Были тестированы бактерии, представленные в GenBank, из таксонов α-, *β-, γ-, δ-proteobacteria, Actinobacteria.* Рассматривались регуляторные области генов *hisG, hisZ, hisS*, *pheA*, *pheST, trpEG*, *trpA*, *trpB*, *trpE*, *trpS*, *thrA, thrS*, *leuA*, *leuS*, *ilvB*, *ilvI, ilvA, ilvC, ilvD, ilvG.* Модель разрешает такие сложные структуры как псевдоузлы и РНК-триплексы, хотя при их учете заметно понижается производительность программы. При моделировании регуляции гена *ilvD* у *Staphylococcus* и *Listeria* наблюдалась картина, похожая на случай гена *hisG*, которая показывает, что учет энергии триплекса в составе антитерминатора необходим. Для гена *ilvB* имеется структура, похожая на классическую аттенюаторную регуляцию, но без полиурацила у ряда δ-протеобактерии. Однако здесь регуляция не подтверждается моделированием. Мы продолжим работу над улучшением модели, изменяя в ней некоторые зависимости и параметры с одной стороны и повышая производительность компьютерной программы с другой стороны.

Автор благодарен В.А. Любецкому за помощь и пояснения.

Литература

1. Lyubetsky V.A., Pirogov S.A., Rubanov L.I., Seliverstov A.V. “Modeling classic attenuation regulation of gene expression in bacteria” *Journal of Bioinformatics and Computational Biology*, V. 5, No 1, 2007, p. 155-180.

Асимптотические оценки для гауссовских интегралов

Кравцева Анна Константиновна

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

anna-conf@yandex.ru

В работе находится асимптотическое разложение гауссовского интеграла вида $\int\limits_H \exp\left(-h^2F(x)\right)\mu_{\frac{1}{h^2}T}(dx)$, где H – гильбертово пространство, h - большой положительный параметр, T – симметричный положительно-определённый ядерный оператор на гильбертовом пространстве с такими собственными числами λ_i, что $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots$, $0<\lambda_i<1$. Пусть существует единственная точка x_0, т.ч. $T^{-1}x_0 + F'(x_0)=0$ (производная определена всюду). Пусть также существует окрестность $\|x\|\ge\delta$, в которой $F^{(n)}(x)$ определена и представляет собой равномерно непрерывную функцию в этой окрестности. Пусть существует такое число $0<\varepsilon<1$, что $F(x_0+y)-F(x_0)\ge -\varepsilon\frac{1}{2}\|y\|^2$. Методами функционального анализа в работе получена следующая асимптотика гауссовского интеграла:

$$\int\limits_H \exp\left(-h^2F(x)\right)\mu_{\frac{1}{h^2}T}(dx) = \frac{\exp\left(-h^2\left(\frac{1}{2}\left(T^{-1}x_0,x_0\right)+F(x_0)\right)\right)}{\det\left(\sqrt{I+F''(x_0)}\right)}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\frac{1}{h^{2i}}c_n + o\left(\frac{1}{h^{2\left[\frac{n}{2}\right]-2}}\right)\right)$$

. Для первых членов верно следующее разложение:

$$\frac{\exp\left(-h^2\left(\frac{1}{2}\left(T^{-1}x_0,x_0\right)+F(x_0)\right)\right)}{\det\left(\sqrt{I+F''(x_0)}\right)}\left(\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{h^{2i}}c_i + O\left(\frac{1}{h^4}\right)\right),$$ где

$$c_0=1,\ c_1=-\frac{1}{8\cdot 4!}Tr\left(T^{-1}+F''(x_0)\right)^{-1}\left(Tr\left(T^{-1}+F''(x_0)\right)^{-1}\left(F^{(4)}y^4\right)''\right)''+$$

$$+\frac{1}{48\cdot(3!)^2\cdot 2}Tr\left(T^{-1}+F''(x_0)\right)^{-1}\left(Tr\left(T^{-1}+F''(x_0)\right)^{-1}\left(Tr\left(T^{-1}+F''(x_0)\right)^{-1}\left(\left(F'''(x_0)y^3\right)^2\right)''\right)''\right)''.$$

Литература

1. Го Х.С. Гауссовские меры.
2. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы.

Семантический поиск математических выражений в web-среде

Кубаев Вячеслав Андреевич[10]
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
v.kubaev@gmail.com

Поисковые технологии имеют большое значение для сети Интернет, поскольку делают доступным для широкого использования весь представленный в сети объем информации. Данный доклад посвящен организации поиска математических формул в web-среде с учетом смысловой нагрузки выражений. В качестве формата представления формул используется формат разметки содержания (content markup) нотации MathML – специализированного xml-формата, рекомендованного консорциумом W3C для публикации математических формул в сети Интернет (подробнее см. http://www.w3.org/TR/MathML2/).

Задача семантического поиска математических выражений может быть формализована как задача поиска подмножества в фиксированном множестве упорядоченных деревьев с помеченными вершинами. Искомое подмножество деревьев должно отвечать шаблону поиска – выделенному упорядоченному дереву с помеченными вершинами. При этом полагается, что дерево отвечает шаблону поиска, если шаблон может быть вложен в рассматриваемое дерево с сохранением отношений родитель-сын, порядка и меток вершин. Кроме того деревья предполагаются тождественными относительно некоторой группы преобразований структуры и переименования вершин. Указанная группа преобразований вводится для устранения неоднозначности представления формул, связанной с переименованием переменных, коммутативностью и дистрибутивностью операций. Отдельной задачей является организация релевантного поиска математических выражений, результатом которого является набор чисел, характеризующий степень соответствия целевых деревьев поисковому шаблону.

Задачи поиска поддеревьев по шаблону исследовались авторами в различных постановках в течение последних 35 лет [1]. Была показана NP-полнота задачи для неупорядоченных деревьев и предложены алгоритмы для решения в случае упорядоченных деревьев со сложностью $O(mn)$, где m и n – высоты целевого дерева и дерева запроса соответственно [2]. В литературе не встречается постановка задачи, при которой деревья считаются неразличимыми с точностью до некоторого набора преобразований; для решения проблемы неоднозначного представления формулы ряд авторов в своих работах по организации поиска математических выражений предлагают накладывать более строгие ограничения на формат представления формул [3]. Для организации релевантного поиска в работах, как правило, используется вычисление метрики редактирования (edit distance) [4], однако такой подход не оправдывает себя в случае поиска математических выражений.

Нами предложено решение задачи о поиске подформулы с использованием регулярных выражений, которые широко поддерживаются в базах данных и языках программирования. Был определен набор преобразований, устраняющий неоднозначность представления формулы в нотации MathML. Данные идеи реализованы в прототипе поисковой системы. Для организации релевантного поиска предложен механизм предобработки формул и расширения меток вершин дерева, позволяющий вычислить расстояние с учетом смысловой нагрузки формул.

Литература

1. Hoffman, C.M., O’Donnel, M.J. (1982) Pattern matching in trees // Journal of the ACM, 29(1), pp. 68-95.
2. Kilpelainen, P., Mannila H. (1994) Ordered and unordered tree inclusion // SIAM J. Comput., 24(2), pp. 213-225.

[10] Автор выражает признательность своему научному руководителю Борисенко В.В. за помощь в проведении работы.

3. Altamimi, M.E., Abdou, S.Y. (2007) A More Canonical Form of Content MathML to Facilitate Math Search // Proceedings of Extreme Markup Languages 2007.
4. Kovacs, L., Repasi, T., Baksa-Varga, E. (2005) Approximate Subtree Search for Labeled Trees with Small Depth Value // Proceedings of SAMI 2005, pp. 303-311.

Выпуклые оболочки кривых и особенности множества транзитивности[11]

Курбацкий Алексей Николаевич[12]

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

akurbatskiy@gmail.com

Рассматривается управляемая система на трехмерном многообразии, касательное пространство в каждой точке которого снабжено множеством допустимых скоростей (индикатрисой), гладко зависящим от точки. Предполагается, что индикатриса является гладкой замкнутой пространственной кривой. Случай, когда она является гладкой замкнутой поверхностью, был рассмотрен в работе [2].

В теории управления представляет интерес множество локальной транзитивности, которое состоит из таких точек многообразия, что нулевая скорость принадлежит внутренности выпуклой оболочки индикатрисы. В частности, для всякой пары близких точек из множества локальной транзитивности найдется достаточно короткая допустимая кривая, соединяющая эти точки. Граница множества локальной транзитивности состоит из точек, в которых нулевая скорость принадлежит границе выпуклой оболочки индикатрисы [4].

В данной работе классифицированы все типичные локальные особенности границы множества локальной транзитивности с точностью до диффеоморфизма.

Литература

1. Закалюкин В. М., Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий, “Функциональный анализ и его приложения”, Т. 11 (1977), вып. 3, 76-77.
2. Закалюкин В. М., Курбацкий А. Н., Особенности огибающих семейств плоскостей в теории управления, Труды МИАН им. В. А. Стеклова т. 262 (2008) – 14 с.
3. Sedykh V. D. Stabilization of sungularities of convex hulls, Math. USSR sb. 63, 499-505, 1989.
4. Davydov A. A. Qualitative theory of control systems , Translations of Math. Monographs, AMS R.I., 1994, ISBN-0-8212-4590-X.

О разрешимости свойства обратимости для классов многослойных двумерных бинарных клеточных автоматов[13]

Кучеренко Игорь Викторович[14]

младший научный сотрудник

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

kucherenko@intsys.msu.ru

Двумерные бинарные клеточные автоматы (БКА) формируют простейший «технически реализуемый» класс клеточных автоматов. Одним из наиболее важных подклассов в нем

[11] Поддержано грантом НШ-709.2008.1 и грантом Министерства Образования РФ.

[12] Задачу о классификации особенностей границы множества транзитивности поставил д.ф.-м.н. профессор А.А. Давыдов.

[13] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 06-01-00240.

[14] Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику Кудрявцеву В.Б., без помощи и поддержки которого результаты, составляющие содержание данной работы, не существовали бы.

является множество обратимых БКА, которые характеризуются тем, что в процессе их функционирования не происходит потери информации [1], [2].
Известно, что задача распознавания свойства обратимости одномерных БКА, заданных шаблоном соседства и локальной функцией переходов (ЛФП), алгоритмически разрешима. Для двумерных (и многомерных) БКА эта задача уже не является разрешимой [3]. Более детальный анализ расслоения класса двумерных БКА на подклассы по принадлежности их ЛФП к некоторому классу Поста, проведенный автором в работе [4], позволил очертить множество нетривиальных обратимых БКА.
При дальнейшем исследовании класса БКА автором были выявлены связи между разрешимостью задачи распознавания обратимости и пространственным расположением слагаемых полинома Жегалкина ЛФП. Назовем двумерный БКА двухслойным, если концы всех векторов из окрестности нулевой ячейки можно разместить на двух параллельных прямых, трехслойным - если на трех. Назовем двумерный БКА слоистым, если существует семейство параллельных прямых, такое, что каждое множество концов векторов из окрестности нулевой ячейки, соответствующие отдельным слагаемым полинома Жегалкина ЛФП, принадлежит ровно одной прямой.
Автором установлено, что в классе двумерных двухслойных БКА свойство обратимости алгоритмически разрешимо. Для класса трехслойных БКА свойство обратимости уже алгоритмически не разрешимо. Для класса слоистых БКА установлена разрешимость свойства обратимости [5].

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Болотов А.А. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.
2. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
3. Кучеренко И.В. «О свойстве обратимости бинарных клеточных автоматов» – в книге: Труды XXVI Конференции молодых ученых. Москва: Механико-математический факультет МГУ, 2004.
4. Кучеренко И.В. «О структуризации класса обратимых бинарных клеточных автоматов» – журнал «Интеллектуальные системы», том 9, выпуск 1-4, 2005, с. 445-456.
5. Кучеренко И.В. «Об условиях разрешимости обратимости булевых клеточных автоматов» - журнал «Интеллектуальные системы», том 11, выпуск 1-4, 2008, с. 721-726.

О порядках функций роста средней сложности поиска идентичных объектов для случайных баз данных

Кучеренко Наталья Сергеевна[15]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
nsk.email@gmail.com

Теория хранения и поиска информации является важным разделом теории интеллектуальных систем. Одним из ключевых объектов этой теории является информационный граф (ИГ) - управляющая система, которая позволяет рассматривать имеющиеся модели данных и задачи, связанные с ними, с более общих позиций [1].
В работе рассматривается средняя сложность оптимальных ИГ, которые реализуют алгоритмы решения задачи поиска идентичных объектов для классов баз данных, являющимися случайными векторами с независимыми компонентами из интервала (0, 1). Данные классы задач задаются функциями плотности распределения запросов f и элементов g.

[15] Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Гасанову Э.Э. за постановку задачи и внимание к работе.

В работах [2, 3] автором исследовалось поведение математического ожидания сложности на классах задач при увеличении мощности базы данных n. Были получены условия на функции f и g, при которых изучаемая величина имела порядок $\log_2 n$ или константу. Также указаны классы баз данных, для которых можно оценить не только порядок, но и асимптотику математического ожидания.

Порядки функции роста математического ожидания сложности оптимального ИГ не ограничиваются только логарифмом и константой. В работе [3] автором построен класс задач, на котором поведение сложности оптимального алгоритма в среднем по порядку не больше $\log_2 \log_2 n$ и не меньше $\log_2 \log_2 \log_2 n$.

Литература

1. Гасанов Э.Э., Кудрявцев В.Б. Теория хранения и поиска информации. М.: Физматлит, 2002.
2. Кучеренко Н.С. «Сложность поиска идентичных объектов в случайных базах данных» – журнал «Интеллектуальные системы», том 11, выпуск 1-4, 2007, с. 525-551.
3. Кучеренко Н.С. «Средняя сложность поиска идентичных объектов для случайных неравномерных баз данных» - журнал «Дискретная математика» – в печати.

Предобработка графа дорожной сети в задачах маршрутизации автотранспорта

Лахно Алексей Павлович[16]

Студент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
alakhno@gmail.com

К задачам маршрутизации автотранспорта (Vehicle Routing Problem) относится целый класс оптимизационных задач, связанных с составлением расписания работы парка автомобилей (агентов), занимающихся обслуживанием фиксированного набора клиентов.

Входными данными при решении задачи являются:

- дорожная сеть, задаваемая взвешенным ориентированным графом $G = (V, E)$ большой размерности. Вершинам графа соответствуют перекрёстки, а рёбрам — участки дорог, их соединяющие. Веса рёбер задают ожидаемое время движения по соответствующим дорогам; множество сервисных точек SP — выделенное множество точек на карте, каждая из которых является клиентом, начальной или конечной точкой маршрута одного из агентов;
- множество агентов A, для каждого из которых заданы начальная и конечная точки маршрута $s, t \in SP$ и рабочее время $[t_1, t_2]$; множество клиентов C, для каждого из которых заданы местоположение на карте $p \in SP$, период времени, в который клиент может быть обслужен $[t_1^1, t_2^1] \cup \ldots \cup [t_1^k, t_2^k]$, и продолжительность обслуживания t.

Требуется составить корректное в условиях поставленных ограничений расписание работы агентов, максимизирующее целевую функцию, зависящую от набора обслуженных клиентов.

Привязка множества сервисных точек SP к графу дорожной сети $G = (V, E)$ производится при помощи построения обобщённого графа дорожной сети $G_g = (V_g, E_g)$, где $V_g = V \cup V_{sp}$, $E_g = E \cup E_{sp}$. Каждой сервисной точке $sp \in SP$ ставится в соответствие новая вершина $v_{sp} \in V_{sp}$, которая соединяется рёбрами с одной или несколькими вершинами исходного графа G, соответствующими ближайшим к sp перекрёсткам.

[16] Автор выражает признательность с.н.с. Борисенко В.В. за помощь в подготовке тезисов.

Как отмечается в работе [1], в реальных задачах граф дорожной сети $G = (V, E)$ имеет большую размерность: $|V|, |E| \approx 10^5 - 10^7$. Количество же сервисных точек относительно невелико: $|SP| \approx 10^2 - 10^4$. В связи с этим авторы [1] предлагают производить предобработку обобщённого графа $G_g = (V_g, E_g)$ и в процессе решения оптимизационной задачи работать уже с меньшим графом $G_r = (V_r, E_r)$, в котором вершинам V_r соответствуют сервисные точки, а рёбрам E_r — кратчайшие пути в обобщённом графе G_g между вершинами из V_{sp}. Недостатком использования предобработки обобщённого графа G_g является необходимость полного перевычисления для задач с одной и той же дорожной сетью, но различными наборами сервисных точек. Поэтому предлагается производить предобработку исходного графа дорожной сети G. Ответ на запрос о кратчайшем расстоянии между заданной парой сервисных точек может быть получен путём анализа результатов нескольких запросов о кратчайших расстояниях между вершинами исходного графа дорожной сети G. В рамках данного подхода результат предобработки является атрибутом дорожной сети, не зависящим от набора сервисных точек, и, таким образом, может повторно использоваться для различных наборов входных данных с одной и той же дорожной сетью. Кроме того, проведён анализ возможности применения ряда алгоритмов предобработки в рамках старого и нового подходов.

Литература

1. Панкратьев Е.В., Чеповский А.М., Черепанов Е.А., Чернышёв С.В. (2003) Алгоритмы и методы решения задач составления расписаний и других экстремальных задач на графах больших размерностей // Фундаментальная и прикладная математика, том 9, выпуск 1, стр. 235–251.

Об алгебраических операциях на графах, сохраняющих степенную последовательность

Лашева Мария Игоревна[17]

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

maria.lasheva@gmail.com

В 1962 г. С. Хакими поставил задачу построения эффективного алгоритма для перебора всех графических реализаций заданной степенной последовательности. В 1955 г. В. Гавел предложил процедуру перехода от одного неориентированного графа без петель и кратных ребер к другому с сохранением степенной последовательности. Этот переход есть последовательное выполнение операций переключения ребер (без получения кратных ребер и петель).

Автором получен конечно-автоматный алгоритм А, который позволяет оптимизировать его время работы по сравнению с известным алгоритмом В. Гавела и С. Хакими и может быть использован для оптимизации свойств компьютерных сетей с заданным множеством провайдеров и ограничениями на коммутационные возможности каждого из них. При этом использование конечно-автоматного алгоритма А, в отличие от алгоритма В. Гавела – С. Хакими, не потребует изучения глобальных характеристик всей сети, а лишь знания ее локальных свойств. Также верны следующие теоремы.

Теорема 1. Время работы алгоритма А для пары занумерованных графов с n вершинами, степень каждой из которых не более k, составляет $O(k^2n^2)$.

[17] Автор выражает благодарность научному руководителю А.А.Часовских за руководство над работой.

Теорема 2. Определим размер задачи для графов с n вершинами как n^2. Объем памяти алгоритма А отличается от размера задачи не более чем на константу.

Автором введена операция переключения для орграфов и гиперграфов, а также построены конечно-автоматные алгоритмы, позволяющие распространить результаты теорем 1, 2.

Теорема 3. Время работы такого алгоритма для пары занумерованных орграфов с n вершинами, степень каждой из которых по сумме входящих и исходящих ориентированных ребер не более k, составляет $O(k^2n^2)$, а объем памяти отличается от размера задачи не более чем на константу.

Теорема 4. Время работы такого алгоритма для пары занумерованных гиперграфов с n вершинами, степень каждой из которых не более k, и гиперребрами, каждое из которых содержит не более m вершин, составляет $O((\max(k,m))^2 2^{2n})$, а объем памяти отличается от размера задачи не более чем на константу.

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. (1985) Введение в теорию автоматов. М.: Изд-во Наука.
2. Hakimi S. L. (1962) On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graphs. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1962,10, N3, 496 - 506.
3. Гавел В. (1955) Заметка о существовании конечных графов. Cas. Pert. - Mat., 1955, 80, N4, 477 - 481.
4. Ryser H. J. (1963) Combinatorial Mathematics. The Garus Mathematical Monographs, N 4. Rahway, N. J.: Mathematical Association of America.
5. Лашева М. И. (2007) Об алгебраических операциях на графах, сохраняющих степенную последовательность. Интеллектуальные системы, 2007, 11, 551-592.

О задачах распределения ресурсов и проверки устойчивости для систем информационного мониторинга

Лебедев Анатолий Анатольевич[18]

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Механико-математический ф-т

lebedev_aa@rambler.ru

Технология информационного мониторинга ([2]) была разработана для анализа сложных, слабоформализованных проблем (процессов) на основе всей доступной информации, построения прогнозов их развития и выработки рекомендаций по управлению их развитием.

В настоящей работе технология информационного мониторинга формализуется с использованием классического аппарата дискретной математики – схем функциональных элементов и функций k-значной логики ([1]). В этой формализации решаются две ключевые задачи технологии информационного мониторинга – проверка устойчивости модели и задача оптимального распределения ресурсов.

Задача проверки устойчивости

Формальная постановка задачи имеет следующий вид:

$F(x_1,...,x_N)$ – функция *k*-значной логики, заданная схемой функциональных элементов над базисом, состоящим из всех функций от n и менее переменных. Для заданного $1 \le A \le k-2$

[18] Автор выражает признательность В.Б. Кудрявцеву и А.П. Рыжову за обсуждение работы и ценные рекомендации

необходимо проверить, удовлетворяет ли F следующему условию (назовём его A-устойчивостью):

$$\forall \alpha, \beta \in E_k^N \max_{i=1\dots N} |\alpha_i - \beta_i| \le A \Rightarrow |F(\alpha_1, \dots, \alpha_N) - F(\beta_1, \dots, \beta_N)| \le A$$

Задача распределения ресурсов

Формальная постановка задачи выглядит следующим образом:

$F(x_1, \dots, x_N)$ – функция k-значной логики, заданная схемой функциональных элементов над базисом, состоящим из всех функций от n и менее переменных, $a_1, \dots, a_N$ – начальные значения переменных, $C_i(x)$ – стоимость присвоения i-ой переменной значения x (из текущего состояния). Для заданного C необходимо максимизировать $F(x_1, \dots, x_N)$ при ограничении $\underset{i}{\perp} C_i(x_i) \le C$, где $\perp$ – бинарная операция, удовлетворяющая аксиомам коммутативности, ассоциативности и монотонного неубывания, которую мы будем называть функционалом стоимости.

Для обеих задач была доказана их труднорешаемость в общем случае и выделены частные случаи, допускающие применение полиномиальных алгоритмов. Также был получен алгоритм, проверяющий принадлежность произвольной модели этим частным случаям.

Литература

1. Яблонский С.В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. 1959. Вып. 2. С. 7-38.
2. Ryjov A. Basic principles and foundations of information monitoring systems. In: Monitoring, Security, and Rescue Techniques in Multi-agent Systems. Springer, 2005. p.147–160.

Стохастические представления функционалов «максимального» типа от случайного блуждания

Люлько Ярослав Александрович
Студент
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
yaroslav.lyulko@gmail.com

Рассмотрим бернуллиевское случайное блуждание $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $S_0 = 0$, где $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) =$ ½, $i \ge 1$, и величины $\xi_1 \dots \xi_n \dots$ независимы. Пусть блуждание $(S_k)_{k \ge 0}$ задано на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

В работе исследованы вопросы отыскания стохастических представлений для функционалов $F = F(\omega)$ от случайного блуждания. Получены как обычные, так и *многократные* представления следующих функционалов:

$$F_N = \max_{0 \le k \le N} S_k, \quad F_{\tau_{-a}} = \max_{0 \le k \le \tau_{-a}} S_k,$$

где τ_{-a} - первый момент достижения уровня $-a, a \in \mathbb{N}$, а также представление функционала

$$F_{g_N} = \max_{0 \le k \le g_N} S_k,$$

где g_N– момент последнего нуля случайного блуждания на множестве $(0, N]$.

В частности, были получены представления:

$$F_N = EF_N + \sum_{k=1}^{N} G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1}) \Delta S_k \text{ – однократное представление,}$$

$$F_N = EF_N + \sum_{k=1}^{N} \sum_{1\le t_1<\dots<t_k\le N} c(t_1 \dots t_k)\,\Delta S_{t_1} \dots \Delta S_{t_k}$$ – многократное представление.

Литература

1. Ширяев А.Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от броуновского движения. I. – Теория вероятн. и ее примен., 2003, т.48, в.2, с.375-385.
2. Граверсен С.Э., Ширяев А. Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от броуновского движения. II. – Теория вероятн. и ее примен., 2006, т.51, в.1, с.64-77.
3. Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2006, 416 с.
4. Седлецкий А.М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005, 504 с.

Асимптотика базисных функций обобщенного ряда Тейлора для одного класса функций

Макаричев Виктор Александрович

Аспирант

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина

victor.makarichev@gmail.com

В [1] для класса функций $H_{\rho,2} = \left\{ f \in C^{\infty}_{[-1,1]} : \left| f^{(n)}(x) \right| \le c(f) \cdot \rho^n \cdot 2^{n^2} \right\}$ были построены ряды, названные обобщенными рядами Тейлора.

Пусть $N_0 = \{-1,0,1\}$, $N_n = \{k \in Z : |k| \le 2 \cdot 4^{n-1}\}$ для $n \in N$; $x_{0,k} = k$ при $k \in N_0$, $x_{n,k} = \dfrac{k}{2 \cdot 4^{n-1}}$ при $k \in N_n$ и $n > 0$; $D_n = \{1,2,\dots,4^{n+1}-1\} \setminus \{2k\}$ при $k \in N$; $x^*_{n,p} = -1 + \dfrac{p}{2 \cdot 4^n}$ при $p \in D_n$. Согласно [1], если $f \in H_{\rho,2}$ $(1 < \rho < 4)$, то имеет место $f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in N_n} a_{n,k} \cdot \varphi^{(l)}_{n,k}(x) + \sum_{p \in D_n} b_{n,p} \cdot \psi^{(l)}_{n,p}(x) \right)$, где $a_{n,k} = f^{(n)}(x_{n,k})$ и $b_{n,p} = f^{(n)}\left(x^*_{n,p} - \dfrac{1}{2 \cdot 4^n} \right) - 2 \cdot f^{(n)}\left(x^*_{n,p} \right) + f^{(n)}\left(x^*_{n,p} + \dfrac{1}{2 \cdot 4^n} \right)$. При этом ряд в правой части сходится равномерно при каждом $l = 0,1,2,\dots$. Обобщенные ряды Тейлора позволяют восстанавливать функции f по значениям $f^{(n)}(x)$, $x \in \Lambda_n$, $n = 0,1,2,\dots$ с достаточно простыми конечными множествами Λ_n.

Базисные функции $\varphi_{n,k}, \psi_{n,p}$ строятся при помощи функции $mup_2(x)$, которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения $y'(x) = 2 \cdot \left(y(4x+3) - y(4x-1) + y(4x+1) - y(4x-3) \right)$. Приведенные в [2] рекуррентные формулы для нахождения этих функций являются достаточно громоздкими и неудобными в использовании для больших n. В связи с этим была поставлена задача: исследовать поведение базисных функций $\varphi_{n,k}, \psi_{n,p}$ для больших n и найти удобные для их вычисления формулы.

Рассмотрим функцию $ab_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n \mathrm{mup}_2\left(x-\frac{1}{2\cdot 4^n}\right)$, где λ – наименьший по модулю корень функции $V(z)=-\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{mup}_2\left(-1+\frac{1}{4^{k+1}}\right)z^k}{\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{mup}_2\left(-1+\frac{1}{2\cdot 4^k}\right)z^k}$ (с точностью 10^{-6} $\lambda=-9.617232$). С использованием $ab_2(x)$ были построены асимптотические формулы для $\varphi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$, которые позволяют приближённо вычислять их при больших n.

Литература

1. Рвачев В.А., Старец Г.А. (1983) Некоторые атомарные функции и их применение // ДАН УССР. Серия А. №11. С.22-24
2. Старец Г.А. (1984) Построение базисных функций обобщенных рядов Тейлора // Математические методы анализа динамических систем. №8. С. 16-19

Модели стохастической замены времени для финансовых инструментов на основании полупараметрических оценок

Малиновский Сергей Викторович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
s_malinovsk@mail.ru

Доклад состоит из двух частей, посвященных моделям опционов и рисковых облигаций соответственно.

Метод стохастической замены времени в моделях опционов нашел широкое применение в финансовой математике. Хорошо известны модели стохастической замены времени на основе процесса «квадратного корня» Феллера и однородных процессов Орнштейна-Уленбека. Однако выбор конкретной спецификации процесса стохастической замены времени обосновывается, как правило, общими соображениями, а также соображениями «аналитичности», т.е. возможности представить преобразование Лапласа процесса посредством элементарных или известных функций. В первой части доклада представляется новая методология извлечения информации об «операционном времени» из цен торгуемых на рынке опционов. Результаты применения данной методологии к рынку европейских опционов на индекс S&P500 послужили стимулом к разработке моделей стохастической замены времени нового вида. Две из таких моделей представляются в докладе. Первая, использующая для описания динамики «уровня деловой активности» неоднородный негауссовский процесс Орнштейна-Уленбека, отличается ясностью информационного содержания параметров. Вторая из моделей, основанная на «экспоненциально-пуассоновском» процессе, отличается малым числом свободных параметров (равным четырем), что является важным свойством с точки зрения устойчивости калибровки модели и устойчивости ее параметров во времени. Предлагаемые модели сравниваются с рядом классических аналогов с использованием информационных критериев Акаике, Шварца и Хэннана-Куинна и демонстрируют высокую степень соответствия эмпирическим опционным структурам.

Во второй части доклада представляется модификация модели рисковых облигаций В. Питербарга [5]. Данная модель обобщается введением зависимости между «процессами банкротства» эмитентов и макроэкономическими факторами, являющимися стохастическими. Полученная модель «процесса банкротства» имеет вид неоднородной цепи Маркова со случайной заменой времени. Доказывается, что такое обобщение сохраняет свойство «аналитичности» цен рисковых облигаций и приводятся выражения для цен рисковых облигаций в рамках обобщенной модели.

Литература

1. Малиновский С.В., Назаров Л.В. (2005) Марковская модель временной структуры рисковых облигаций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, №3.
2. Barndorff-Nielsen O.E., and N. Shepard (2001) Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics // Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 63, Part 2, pp. 167-241.
3. Carr P., H. Geman, D. Madan, and M. Yor (2003) Stochastic Volatility for Levy Processes // Mathematical Finance, Vol. 13, No. 3, pp. 345-382.
4. Malinovskii S.V., and L.V. Nazarov (2007) A Markov Model for the Term Structure of Risky Bonds with Dependent Rating-Migration Processes // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 146, No. 4, pp. 6022-6032.
5. Piterbarg V. (1999) Recovering risk-neutral markov process of credit transitions from credit spreads and statistical information // Nations Bank, working report.

Частичное угадывание регулярных выражений

Мастихина Анна Антоновна
Аспирантка
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет, Москва, Россия
anmast@yandex.ru

Рассматриваются конечные детерминированные автоматы, на вход которых поступают последовательности из нулей и единиц. Автомат угадывает i-й символ последовательности, поступающей на вход, если выходной символ в момент $i-1$ равен входному символу в момент i. Скажем, что автомат угадывает сверхслово со степенью $s \in [0,1]$, если на любой подпоследовательности символов доля угаданных символов не меньше, чем s. Сверхслово угадываемо со степенью s, если существует автомат, угадывающий его с этой степенью. Автомат частично угадывает множество сверхслов, если он угадывает каждое сверхслово множества с некоторой степенью.

Рассматриваются множества сверхслов, образованные регулярными выражениями вида $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}^\infty$. Они частично угадываемы (исключая вырожденные случаи, например, $\{0,1\}^\infty$ – все последовательности, где для каждого автомата найдутся сверхслова, степень угадывания которых равна нулю). В частности, для случая, когда все a_i имеют одинаковую длину l, степень будет не меньше $1-\lceil \log_2 m \rceil / l$.

Если автомат угадывает множество со степенью, не меньшей s_1 и не большей s_2, то для любого числа $s \in [s_1, s_2]$ найдется сверхслово из этого множества, угадываемое им со степенью s.

Занумеруем множество автоматов. Пусть i-й автомат угадывает фиксированное множество со степенью, не меньшей s_i, и существует $s_0 = \max_i s_i$. Тогда в данном множестве найдется сверхслово, которое каждый автомат может угадать лишь со степенью, не большей s_0. Из этого утверждения следует, что существует сверхслово, ни с какой степенью не угадываемое никаким автоматом.

Литература

1. Вереникин А.Г., Гасанов Э.Э. Об автоматной детерминизации множеств сверхслов // Дискретная математика. 2006. Т.18, №2, С. 84—97.
2. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов М.: Наука, 1985.

К вопросу о формульном описании словарных предикатов[19]

Моисеев Станислав Владимирович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

stanislav.moiseev@gmail.com

Идея формульного описания словарных предикатов восходит к Р. Фагину [1]. Его результат состоит в том, что каждый словарный предикат R из класса Σ_1^P может быть задан некоторой экзистенциальной второпорядковой формулой φ в том смысле, что все слова, удовлетворяющие предикату R, суть в точности все конечные модели формулы φ, а каждая такая формула задаёт предикат из Σ_1^P. Если известна формула, задающая предикат R, то вычисление значения предиката R на слове α сводится к проверке истинности формулы φ на этом слове. Следовательно, для того чтобы доказать принадлежность словарного предиката R некоторому классу полиномиальной иерархии, достаточно подобрать второпорядковую формулу соответствующей сложности, равносильную предикату R на всех входных словах. Найти такую формулу, однако, может быть нелегко. В результате настоящего исследования удалось показать, что формула, описывающая словарный предикат, может зависеть не только от самого предиката, но и от экземпляра задачи, таким образом обобщая классический результат Фагина.

Пусть словарные функции $f_{мощн}, f_{сигн}, f_{форм} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ и словарный предикат $f_{сем} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ полиномиально вычислимы, причём для каждого слова $\alpha \in \{0,1\}^*$, во-первых, $f_{сигн}\alpha$ — предикатная сигнатура (то есть упорядоченный набор предикатных символов с указанием их местности), а во-вторых, $f_{форм}\alpha$ — замкнутая (т.е. без свободных переменных) первопорядковая формула класса Σ_d сигнатуры $f_{сигн}\alpha$, расширенной константами из множества $M_\alpha = \left\{\beta \in \{0,1\}^* : |\beta| \le |f_{мощн}\alpha|\right\}$. Для каждого слова $\alpha \in \{0,1\}^*$ обозначим через $S\alpha$ такую логическую структуру, что если $f_{сигн}\alpha = \left\langle P_1^{(r_1)},\dots,P_n^{(r_n)}\right\rangle$, то $S\alpha = \left\langle M_\alpha, P_1,\dots,P_n\right\rangle$, где $P_k\left\langle a_1,\dots,a_{r_k}\right\rangle = f_{сем}\left\langle \alpha, P_k^{r_k}, \left\langle a_1,\dots,a_{r_k}\right\rangle\right\rangle$

Теорема

Словарный предикат $R\alpha = (S\alpha \models f_{форм}\alpha)$ лежит в классе Σ_d^P полиномиальной иерархии.

Литература

1. Fagin R. Generalized First-Order Spectra and Polynomial-Time Recognizable Sets. // Karp R. Complexity of Computation, SIAM-AMS Proceedings 7, 1974, pp. 27-41.

[19] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00240).

Дифференцируемость целевой функции в задаче максимизации робастной полезности

Морозов Иван Сергеевич
Аспирант Механико-математического факультета
Московский государственный университет имени М.В.Ломоновосова, Москва, Россия
morozovis@gmail.com

Важной задачей финансовой математики является задача максимизации полезности. В стандартном случае будущее состояние рынка моделируется единственной вероятностной мерой $\mathbf{P}$. В этом предположении исчерпывающее исследование многих аспектов задачи было проведено Д.Крамковым и В.Шахермайером в работах [1,2]. В этих работах предполагалось, что функция полезности $U:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ строго возрастает, строго выпукла, дифференцируема и удовлетворяет условиям Инада. В этом случае целевая функция u дифференцируема для любой модели рынка.

Более общая задача максимизации робастной полезности была рассмотрена А.Гущиным в работе [3]. В этом случае предпочтения инвестора описываются с помощью множества $\mathcal{Q}$ субъективных мер, и целевая функция u выглядит следующим образом: $u(x)=\sup_{\xi\in A}\inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}}\mathrm{E}_{\mathbf{Q}}U(x+\xi)$, где A – множество случайных величин, трактуемых как возможные доходы экономического агента.

В литературе отмечалось, что в задаче максимизации робастной полезности даже при дифференцируемой функции полезности U целевая функция u может быть не всюду дифференцируемой (если допускаются субъективные меры $\mathbf{Q}$ не только эквивалентные $\mathbf{P}$, но и абсолютно непрерывные относительно нее). Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Если функция полезности $U:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\bigcup\{-\infty\}$ является либо степенной, либо экспоненциальной, либо логарифмической, то целевая функция u будет дифференцируемой для любой модели рынка. Если функция полезности U имеет другой вид, то всегда можно подобрать такую модель рынка, что целевая функция u не будет всюду дифференцируемой.

Добавим, что в качестве модели рынка, в которой целевая функция u не будет всюду дифференцируемой, мы выбираем одношаговую модель рынка с двумя рисковыми активами на конечном вероятностном пространстве, состоящем из четырех элементарных исходов.

Литература

1. D.Kramkov, W.Schachermayer (1999) The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets // Ann. Appl. Prob., Vol. 9, No. 3, pp. 904-950.
2. D.Kramkov, W.Schachermayer (2003) Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets // Ann. Appl. Prob., Vol. 13, No. 4, pp. 1504-1516.
3. A.Gushchin (2006) On robust utility maximization // International Conference "Modern Stochastics: Theory and Application", Kyiv, Ukraine, pp. 134-135.

Аддитивные задачи с числами специального вида

Мотькина Наталья Николаевна[20]
Старший преподаватель факультета математики и информационных технологий
Белгородский государственный университет, Белгород, Россия
n_motkina@mail.ru

Пусть $I_{k,n}$ (N) – число решений уравнения $N=p_1^n+p_2^n+\ldots+p_k^n$ (1) в простых числах $p_1, p_2,\ldots, p_k$ для натуральных $k\geq2$ и $n\geq1$. Пусть $J_{k,n,m}(N)$ – число решений (1) в простых числах, на которые налагаются дополнительные ограничения вида $a<\{\eta p^m\}<b$,

[20] Автор выражает глубокую признательность профессору, д.ф.-м.н. Гриценко С.А. за помощь в подготовке тезисов.

где *a, b* – действительные числа, 0<*a*<*b*<1, η – квадратичная иррациональность, *m* – натуральное. Приближенные формулы для классических задач Гольдбаха (*k*=3, *n*=1) и Хуа Ло-Кена (*k*=5, *n*=2, $N\equiv 5 \pmod{24}$) имеют соответственно вид [1]

$$I_{3,1}(N)=\frac{N^2}{2\log^3 N}\sigma(N)+O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right),$$

где

$$\sigma(N)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\backslash N}\left(1+\frac{1}{p^2-3p+3}\right);$$

$$I_{5,2}(N)\cong\frac{N^{3/2}}{\log^5 N}.$$

Полученные нами формулы отличаются от указанных тем, что у нас в главных членах появляются особые ряды специального вида, отражающие некоторые геометрические свойства рассмотренных нами задач. Указанный эффект не был ранее известен.

Основные полученные нами результаты содержатся в следующих теоремах:

ТЕОРЕМА 1. Для любого положительного *C* справедливо равенство

$$J_{3,1,1}(N)=I_{3,1}(N)\sigma(N,a,b)+O(N^2\ln^{-C}N),$$

где

$$\sigma(N,a,b)=\sum_{|m|<\infty}e^{2\pi i m(\eta N-1{,}5(a+b))}\frac{\sin^3\pi m(b-a)}{\pi^3 m^3}.$$

ТЕОРЕМА 2. Справедлива формула

$$J_{5,2,2}(N)=I_{5,2}(N)\sigma(N,a,b)+O(N^{3/2-0{,}0002}),$$

где

$$\sigma(N,a,b)=\sum_{|m|<\infty}e^{2\pi i m(\eta N-2{,}5(a+b))}\frac{\sin^5\pi m(b-a)}{\pi^5 m^5}.$$

ТЕОРЕМА 3. Если *J*(*N*) – число решений уравнения

$$N=n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2 \qquad (2)$$

в целых числах n_1, n_2, n_3, n_4, удовлетворяющих условию $a<\{\eta n\}<b$, то

$$J(N)=(b-a)^4 I(N)+O(N^{7/8+\varepsilon})$$

для любого положительного ε, где *I*(*N*) – число решений (2) в целых числах n_1, n_2, n_3, n_4.

Литература

1. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. – М.: Наука, 1983. – 145 с.

О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом

Муравлёв Алексей Анатольевич

Студент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, г. Москва, Россия

almurav@gmail.com

Пусть $B^\mu=(B_t^\mu)_{t\ge 0}$ – броуновское движение с локальным сносом $\mu\in R$, т.е. $B_t^\mu=B_t+\mu t$, где $B=(B_t)_{t\ge 0}$ – стандартное броуновское движение. Для фиксированного $\mu\in R$ и a>0, b>0 введем моменты:

$\tau_{\mathrm{a}}=\inf\{t\ge 0:\sup_{s\le t}B_s^\mu-B_t^\mu=a\}$, $\sigma_{\mathrm{b}}=\inf\{t\ge 0:B_t^\mu-\inf_{s\le t}B_s^\mu=b\}$, $\gamma_{ab}=\tau_a\wedge\sigma_b$.

В случае $\mu = 0$ будем обозначать эти моменты τ_a^0, σ_b^0 и γ_{ab}^0. Положим

$$\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}, \quad \nu = \mu + \beta, \quad m_a = \frac{e^{2\mu a} - 2\mu a - 1}{e^{2\mu a} + e^{-2\mu a} - 2}, \quad \lambda_a = \frac{e^{2\mu a} - 1}{2\mu}$$

и будем считать далее, что $\lambda \geq 0$. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. В случае b≥a>0 для определенных выше моментов остановки справедливы следующие формулы:

1. $$E\exp\{-\lambda\gamma_{ab} + \beta B^{\mu}_{\gamma_{ab}}\} = \frac{e^{-\nu a}(1 - e^{\nu(b-a)}e^{-\Delta(b-a)cth(\Delta a)})}{ch(\Delta a) - (\nu/\Delta)sh(\Delta a)}$$
$$+ 2\frac{ch(\Delta a)ch(\nu a) - (\nu/\Delta)sh(\Delta a)sh(\nu a) - 1}{sh^2(\Delta a)(1 - (\nu/\Delta)^2)} e^{\nu(b-a)}e^{-\Delta(b-a)cth(\Delta a)},$$ если $|\nu| < \Delta cth(\Delta a)$;

2. $$E\exp\{-\lambda\gamma_{ab}\} = \frac{e^{-\mu a}(1 - e^{\mu(b-a)}e^{-\Delta(b-a)cth(\Delta a)})}{ch(\Delta a) - (\mu/\Delta)sh(\Delta a)}$$
$$+ 2\frac{ch(\Delta a)ch(\mu a) - (\mu/\Delta)sh(\Delta a)sh(\mu a) - 1}{sh^2(\Delta a)(1 - (\mu/\Delta)^2)} e^{\mu(b-a)}e^{-\Delta(b-a)cth(\Delta a)}$$ при $\mu \neq 0$,

$$E\exp\{-\lambda\gamma_{ab}^0\} = \frac{1 - e^{-(b-a)\sqrt{2\lambda}cth(a\sqrt{2\lambda})}}{ch(a\sqrt{2\lambda})} + \frac{2e^{-(b-a)\sqrt{2\lambda}cth(a\sqrt{2\lambda})}}{ch(a\sqrt{2\lambda}) + 1};$$

3. $P(\gamma_{ab} = \tau_a) = 1 - m_a\exp\{-(b-a)/\lambda_a\}$, $P(\gamma_{ab} = \sigma_b) = m_a\exp\{-(b-a)/\lambda_a\}$ при $\mu \neq 0$,
$P(\gamma_{ab}^0 = \tau_a^0) = 1 - 1/2e^{-(b-a)/a}$, $P(\gamma_{ab}^0 = \sigma_b^0) = 1/2e^{-(b-a)/a}$;

4. $E\gamma_{ab} = \dfrac{e^{2\mu a} - 2\mu a - 1}{2\mu^2}\left(1 - m_a\exp\{-(b-a)/\lambda_a\}\right)$ при $\mu \neq 0$, $E\gamma_{ab}^0 = a^2\left(1 - 1/2e^{-(b-a)/a}\right)$.

Литература

1. А.Н. Ширяев, О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением, Совр. пробл. матем., 8, МИАН, М., 2007, 80 с.
2. А. Н. Бородин, П. Салминен, Справочник по броуновскому движению, Лань, СПб., 2000; пер. с англ.: A. N. Borodin, P. Salminen, Handbook of Brownian motion – facts and formulae, Probab. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
3. O. Hadjiliadis, J. Vecer, Quant. Finance, 6:5 (2006), 403–409.

Обобщение задачи об оптимальном ветвлении в ориентированных графах

Наливайко Павел Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет, Москва, Россия
nalivaiko@gmail.com

На основе техники стягивания циклов в 1977 году Тарьяном был разработан эффективный алгоритм решения следующей задачи: для ориентированного графа G с заданной весовой функцией $w: A_G \to R$ найти ветвление B минимального веса $w(B) := \sum_{a \in B} w(a)$ среди всех ветвлений максимальной мощности $|B|$. Ветвлением в ориентированном графе $G = (V_G, A_G)$ называется множество дуг $B \subseteq A_G$ такое, что неориентированный граф, порожденный множеством B ацикличен, и в каждую вершину графа G входит не более одной дуги из множества B.

В данной работе рассмотрено обобщение этой задачи. Для заданного графа G и матроида M_V на множестве его вершин V_G *матроидным ветвлением* в G относительно M_V назовем ветвление в графе G, такое, что множество *покрытых* вершин, будет независимым относительно M_V. Задача об оптимальном матроидном ветвлении рассмотрена в двух постановках.
Невзвешенная задача состоит в нахождении матроидного ветвления B максимальной мощности $|B|$. В работе показана применимость общего подхода стягивания циклов к этой задаче, что ведет к эффективному алгоритму ее решения (при условии задания «оракула» для проверки множеств на независимость для всех матроидов, возникающих в процессе работы алгоритма).
Во *взвешенном* варианте задачи требуется найти матроидное ветвление B, обладающее максимальной мощностью, и максимизирующее значение заданной весовой функции $w(B)$ ($w: A_G \to R$). В случае, если M_V это *разноцветный* матроид (т.е. каждая вершина G покрашена в некоторый цвет, и независимыми считаются множества, не содержащие двух вершин одинакового цвета), то, как показано в данной работе, можно получить алгоритм со сложностью $O(\min(n^2, m\log n))$, где $n = |V_G|$, $m = |A_G|$, которая соответствует сложности алгоритма Тарьяна.

Литература

1. Tarjan R.E. (1977) Finding optimum branchings. *// Networks, №7, p. 25-35*
2. Oxley J. (1992) Matroid Theory. Oxford University Press
3. Schrijver A (2003) Combinatorial Optimization, volume A. Berlin: Springer
4. Cormen T., Leiserson C., Rivest R (1990). Introduction to Algorithms. MIT Press.

Асимптотические разложения в ЦПТ в многомерных пространствах

Осмоловский Игорь Юрьевич
Соискатель
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет, Москва, Россия
igosm@mail.ru

Дается определение многомерных аналогов многочленов Чебышева-Эрмита как полилинейных функционалов, полученных с помощью дифференцирования по Фреше функций, связанных с плотностью нормального закона, для некоторых из них указывается явный вид, перечисляются известные свойства этих функционалов, формулируются и доказываются утверждения, обобщающие эти свойства.
Строятся новые асимптотические разложения плотностей нормированных сумм независимых случайных величин, у которых конечны моменты 5 и 6 порядков. Эти асимптотические разложения строятся с использованием вспомогательных сопровождающих зарядов, которые представляют собой функции, получаемые интегрированием многомерных аналогов многочленов Чебышева-Эрмита по распределению исходных случайных величин. Приводятся явные оценки остаточных частей разложений.
Рассматриваются асимптотические разложения для плотностей в общем случае (без использования вспомогательных зарядов). Здесь получены явные оценки остаточных частей разложений, главные части которых были известны, но оценки остаточных частей давались в виде, непригодном для численных расчетов.

Литература

1. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1975.
2. Колмогоров А.Н., Основные понятия теории вероятностей, М.:1974.

3. Лукач Е. Характеристические функции, М.:Наука, 1979.
4. Осмоловский И.Ю. О некоторых свойствах многомерных аналогов многочленов Чебышева-Эрмита, Теория вероятностей и ее применения, 2008, т. 53, в. 2, с.с.373-378.
5. Сенатов В.В. Асимптотические разложения в ЦПТ, М.:Книжный дом "Либроком", 2008.
6. Ширяев А.Н. Вероятность-1, М.:МЦНМО, 2004.

О расшифровке существенных переменных дискретных функций

Осокин Виктор Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, г. Москва, Россия
osvic@mail.ru

Рассматривается задача расшифровки существенных переменных дискретных функций в рамках модели точной расшифровки [1]. Алгоритму расшифровки разрешается использовать запросы на значение функции. Точная формулировка задачи расшифровки дана в [2]. В монографии [3] представлены разработки в смежном направлении – теории тестового распознавания.

Расшифровке дискретных функций с несущественными переменными с помощью запросов на значение функции посвящены работы [4,5], а также работы автора [6,7,8]. В [6] предложен метод чередования определения существенных переменных функции и собственно расшифровки ее подфункций, позволивший доказать для сложности $\varphi_M(k,n)$ расшифровки монотонных функций, существенно зависящих от не более чем k своих переменных, следующую теорему.

Теорема 1. Имеет место $\varphi_M(k,n) = O(k\log n + \frac{2^k}{\sqrt{k}})$ при $k,n \to \infty$.

В [7] введен новый класс дискретных функций, задающих разбиение булевого куба на грани и построен алгоритм определения существенных переменных таких функций, позволивший получить асимптотику сложности расшифровки в частных случаях [8]. В общем случае для сложности $\varphi_{SPL}(k,n)$ расшифровки таких функций доказана следующая теорема.

Теорема 2. Имеет место $\varphi_{SPL}(k,n) = O(k\log n + 2^k)$ при $k,n \to \infty$.

В [9] для некоторого класса функций, задающих разбиение булевого куба на грани, построен асимптотически оптимальный алгоритм определения существенных переменных функции при малом/большом числе существенных переменных.

Теорема 3. Пусть $k = \log\log n + \beta(n), 2^{\beta(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\psi_{SPL_a}(k,n) \sim \log n$. Пусть $k \sim n$ при $n \to \infty$. Тогда $\psi_{SPL_a}(k,n) \sim n$.

Работа выполнена на кафедре МаТИС Мехмата МГУ. Научный руководитель – профессор Гасанов Э.Э.

Литература

1. D.Angluin. Queries and Concept Learning. Machine Learning, Vol. 2, pp. 319-342, 1988.
2. Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Подколзин А.С. Введение в теорию интеллектуальных систем. Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 2006.
3. Кудрявцев В.Б., Андреев А.Е., Гасанов Э.Э. Теория тестового распознавания. ФИЗМАТЛИТ, М., 2007, 320с.
4. R. Uehara, K. Tsuchida, I. Wegener. Optimal attribute-efficient learning of disjunction, parity, and threshold functions. Lecture Notes In Computer Science; Vol. 1208, 1997.

5. P. Damaschke. Adaptive Versus Nonadaptive Attribute-Efficient Learning. Machine Learning, 41, 197-215, 2000.
6. Осокин В.В. О расшифровке монотонных булевых функций с несущественными переменными. Дискретная математика, в печати.
7. Осокин В.В. О сложности расшифровки разбиения булевого куба на подкубы. Дискретная математика, том 20 выпуск 2, 2008, 46-62.
8. Осокин В.В. Асимптотически оптимальный алгоритм расшифровки разбиения булевого куба на подкубы. Интеллектуальные системы, т. 11, 2007, 587-606.
9. Воронин Б.В., Осокин В.В. О сложности расшифровки существенных переменных функции, задающей разбиение булевого куба. Интеллектуальные системы, т.12,в печати.

Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве вблизи особых точек (случай общего положения)

Парусникова Анастасия Владимировна
аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, г. Москва, Россия
anastassiia@bk.ru

В данной работе рассматривается пятое уравнение Пенлеве. Вблизи особых точек – нуля и бесконечности – найдены асимптотические разложения решений (степенные, степенно-логарифмические, сложные, а также экспоненциально малые добавки к степенным разложениям).

Литература

1. Брюно А.Д. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт № 35 Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2005.
2. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004, т. 59. № 3, с.31-80.

Применение вероятностных источников к распознаванию семейств графиков

Пархоменко Денис Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет, Москва, Россия
dcdenis@rambler.ru

Аппарат вероятностных источников (скрытых Марковских моделей) хорошо зарекомендовал себя в задачах обработки речевых сигналов. Он широко используется инженерами в задачах распознавания речи и прогнозирования погоды.

Однако, функциональность аппарата выходит за рамки только этих двух прикладных задач. В докладе будет рассмотрена проблема применения вероятностных источников к задачам распознавания биологических сигналов человека – а именно, сигналов моргания и ЭКГ.

Задача формулируется таким образом: по графику степени открытости глаза человека определить, было ли моргание на графике или нет. А если было, то определить его длительность. Задача имеет прикладной характер, т.к. многие современные устройства, контролирующие бодрствование человека, базируются на анализе морганий. Автор показал, что по обучающей выборке можно настроить вероятностные источники, решающие данную задачу с высокой точностью и помехоустойчивостью. Были подобраны и содержательно интерпретированы все различные состояния процесса моргания, которые и стали состояниями вероятностного источника, переходы между которыми осуществлялись в соответствие со стохастической матрицей переходов. Настраивая параметры случайных величин выходных функций и стохастической матрицы переходов, удалось добиться того, что выдаваемые источником слова стали адекватно соответствовать семейству заданных последовательностей. Настройка параметров состоит в применении алгоритма, выражающего новые параметры случайных величин через значения предъявляемого сигнала и старые параметры случайных величин. Настройка параметров, или обучение, происходит с помощью алгоритма Баума-Уэлша.

Полученный алгоритм распознавания сравнением с вероятностными источниками работает лучше обычно используемого в таких случаях порогового алгоритма.

Представляет интерес математический аспект применения вероятностных источников.

В докладе будет рассмотрена специфика моделирования сигналов с помощью вероятностных источников. А именно, будет показано, что не всякое финальное распределение вероятностей на булевом кубе размерности n может быть реализовано с помощью вероятностного источника, и существуют распределения вероятностей, которые не могут быть реализованы вероятностными источниками независимо от числа состояний. Таким образом, применение вероятностных источников в задачах распознавания сигналов ограничено.

Литература

1. В.Б. Кудрявцев *Введение в теорию абстрактных автоматов, 1985*
2. L. Rabiner, B.H. Juang. Fundamentals of Speech Recognition. Prentice Hall, 1995
3. X. D. Huang, Y. Ariki, M. A. Jack. Hidden Markov Models for Speech Recognition. Edinburgh University Press, 1990
4. ТИИЭР, т.73, №11, 1985

Вывод формулы Ито из дискретной формулы Ито для функции, определенной на полуплоскости с разрывом по прямой y=g(x), а также для функций с разрывом первой производной

Перельман Глеб Владимирович

Студент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, г. Москва, Россия
glebperelman@gmail.com

Хорошо известна стандартная формула Ито

$$f(W_t) - f(0) = \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

где функция *f* дважды непрерывно-дифференцируема.

Существуют различные варианты этой формулы, требующие $f' \in L^2_{loc}$, однако они имеют значительно более сложный вид (например, формула Фёллмера-Проттера-Ширяева). И они довольно неудобны для применения на практике.

Однако существует целый ряд задач, например, задачи об оптимальной остановке, для решения которых необходимо иметь дело с двумерными функциями, имеющими разрыв (либо разрыв первой производной) по некоторой прямой *y=g(x)*.

Получены формулы для этих случаев, используя дискретную аппроксимацию броуновского движения симметричным случайным блужданием.

Так, аналог для функции с разрывом производной по дифференцируемой прямой *y=g(x)* выглядит следующим образом

$$f(t,W_t)-f(0,0)=\int_0^t f'_t(s,W_s)ds+\int_0^t f'_x(s,W_s)dW_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,W_s)ds+$$

$$+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \frac{f'_{x+}(s,g(s))-f'_{x-}(s,g(s))}{2} I(|W_s-g(s)|<\varepsilon)ds$$

где f'_t, f'_x и f''_{xx} – соответствующие частные производные по первому (t) и второму (x) аргументам, а $f'_{x+}(s,g(s))=\lim\limits_{t\to s+0} f'_x(t,g(s))$, $f'_{x-}(s,g(s))=\lim\limits_{t\to s-0} f'_x(t,g(s))$.

Последнее слагаемое является некоторым аналогом локального времени, которое встречается, например, в формуле Танака (аналогичная формула для $f=|x|$).

Следует заметить, что эта формула заметно проще и удобнее более общих аналогов, про которые говорилось выше.

Литература

1. Takahiko Fujita, Yasuhiro Kawanishi. A Proof of Ito's Formula Using Discrete Ito's Formula.
2. Goran Peskir, Albert Shiryaev. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems.

Рекурсивные вейвлет-преобразования на сфере[21]

Подкопаев Антон Игоревич

Студент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

tony-meshok@yandex.ru

В ряде задач обработки изображений (например, в кристаллографии, компьютерной графике, медицине, географии, астрономии) данные представляются функциями на двумерной сфере. Для локального анализа в этом случае создан ряд конструкций сферических вейвлетов, обзор части которых дан в [1]. Предложим способ разложения по недопустимым (для обычного преобразования) вейвлетам, переходящий в евклидовом пределе (при увеличении радиуса сферы) в предложенный в [2] для вейвлетов на плоскости и сохраняющий устойчивость последнего к квадратично интегрируемым погрешностям.

Введём, следуя [1], $D_a : g(\varphi,\theta)\mapsto 4a^2\left(\left(1-a^2\right)\cos\theta+a^2+1\right)^{-2} g(\varphi, 2arctg(a\cdot tg(\theta/2)))$ и $T_\gamma : g(\omega)\mapsto g(\gamma^{-1}\omega)$ ($a>0$, $\gamma\in SO(3)$, $\omega=(\varphi,\theta)\in S^2$), и пусть $g_{a,\gamma}=T_\gamma\circ D_a g$. Непрерывным рекурсивным вейвлет-преобразованием $f\in L^2(S^2)$ назовём такую $\tilde f(a,\gamma)$, что $\tilde f(a,\gamma)=\int_{S^2}\left(f(\omega)-\int_0^a d\alpha\int_{SO(3)}\tilde f(\alpha,\beta)\eta_{\alpha,\beta}(\omega)d\nu(\beta)\right)\overline{\eta_{a,\gamma}(\omega)}d\mu(\omega)$ (μ и ν – меры Хаара на S^2 и $SO(3)$). Если $\int_{S^2}\eta(\omega)(1+\cos\theta)^{-1}d\mu(\omega)\neq 0$, то $f(\omega)=\int_0^\infty d\alpha\int_{SO(3)}\tilde f(\alpha,\beta)\eta_{\alpha,\beta}(\omega)d\nu(\beta)$ (формула восстановления) и $\|f\|^2_{L^2(S^2)}=2\int_0^\infty d\alpha\int_{SO(3)}\left|\tilde f(\alpha,\beta)\right|^2 d\nu(\beta)$ (равенство Парсеваля). Данное вейвлет-преобразование, как и обычное, суть спектральная фильтрация и легко вычисляется переходом к разложениям по сферическим гармоникам $Y_{s,t}$. Аналогичными свойствами обладают обобщения данного преобразования на гиперсферах S^n ($n>2$).

Дискретизацию удобно проводить, следуя [3]. Зафиксировав натуральное число l, введём на сфере сетку $\omega_{i,j}=(\varphi_i,\theta_j)$ с $4l-1$ равноотстоящим узлом φ_i и $2l$ узлами θ_j с $P_{2l}(\cos\theta_j)=0$ (P_{2l} – полином Лежандра степени $2l$), а на $SO(3)$ – $\gamma_{i,j,k}=(\varphi_i,\theta_j,\psi_k)$ (в z-y-z углах Эйлера)

[21] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-01-00669).

с такими же φ_i и θ_j и $4l-1$ равноотстоящим узлом ψ_k. Сопоставим возрастающим масштабам $a_m > 0$ веса $c_m > 0$. Начав с $r_0(f) = f$, рекурсивно вычислим $\breve{f}_{m;i,j,k} = \left\langle r_m(f), \eta_{a_m,\gamma_{i,j,k}} \right\rangle$ и $r_{m+1}(f) = r_m(f) - c_m \sum_{j=0}^{2l-1} \left(P'_{2l}(\cos\theta_j)\sin\theta_j\right)^{-2} \sum_{i,k=0}^{4l-2} \breve{f}_{m;i,j,k}\eta_{a_m,\gamma_{i,j,k}}$. Спектральная фильтрация имеет место и здесь, и подсчёт вновь упрощается с помощью разложения по $Y_{s,t}$ (приближённо выполняемого, согласно [3], за $O(l^2 \log l)$ операций).

Литература

1. Antoine, J-P., Roşca, D. (2008) The wavelet transform on the two-sphere and related manifolds: a review // Proc. of SPIE, Optical and Digital Image Processing, №7000, p. 1–15.
2. Подкопаев А.И. (2009) Непрерывные рекурсивные вейвлет-преобразования // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции Воронежской зимней математической школы. Воронеж: ВГУ. С. 139–140.
3. Tygert, M. (2008) Fast algorithms for spherical harmonic expansions, II // Journal of Computational Physics, №227, p. 4260–4279.

Разрешимость задачи со смещением для псевдопараболического уравнения[22]

Попов Николай Сергеевич

Студент

Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова

madu@sitc.ru

Пусть Ω есть конечный интервал (0,1) оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0 < T < +\infty$. В области Q рассматривается уравнение

$$u_t - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u - u_{xxt} = f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$u_x(0,t) = \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(1,t), \;\; 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u_x(1,t) = \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(1,t), \;\; 0 < t < T, \tag{3}$$

где $a(x,t),\, c(x,t),\, f(x,t),\, \alpha_1(t),\, \alpha_2(t),\, \beta_1(t),\, \beta_2(t)$ – заданные функции, определенные при $x\in\overline{\Omega} = [0,1],\; t\in[0,T]$.

Рассматривается краевая задача: найти функцию $u(x,t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия (2), (3), а также начальное условие

$$u(x,0) = 0, \;\; x\in\Omega. \tag{4}$$

Отметим, что в работе [1] методом продолжения по параметру была исследована разрешимость начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности $u_t - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t)$. В настоящей работе доказывается однозначная разрешимость поставленной краевой задачи также с использованием метода продолжения по параметру. В случае однородных локальных краевых условий вида (2), (3) – т.е. при выполнении условий $\alpha_2(t)\equiv\beta_1(t)\equiv 0$ – теоремы разрешимости для уравнений вида (1), называемых псевдопараболическими или же уравнениями Аллера, были доказаны в работах [2], [3].

[22] Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» и Советом программы (протокол №АХ-23/11пр от 12 декабря 2008 г.)

Литература

1. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственных нелокальных краевых задач для параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2008. №3(62). С. 165-175.
2. Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм., 1985.
3. Kozhanov, A.I. Composite Type Equation and Inverse Problem. VSP. Netherlands, Utrecht, 1999.

Условия существования периодического решения линейной управляемой системы дифференциальных уравнений

Потапова Екатерина Алексеевна

Студентка

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина, физико-математический факультет, Рязань, Россия

potapovargu@yandex.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{1}$$

в которой x – двумерный вектор, u – i–мерный вектор управления, $i \in \{1,2\}$, $A(t)$ – 2×2–матрица, $B(t)$ – $2\times i$–матрица, $i \in \{1,2\}$. Матрицы $A(t)$ и $B(t)$ непрерывны при $t \in [0,1]$.

Ставится задача – определить условия существования управления, при котором система (1) имеет периодическое решение, доставляющее минимум функционалу $\int\limits_0^1 xc(t)x dt$, определенному на множестве периодических решений системы (1), начальные значения которых при $t=0$ принадлежат отрезку, соединяющему точки пересечения прямых $\beta = q_1\alpha$, $\beta = q_2\alpha$ с прямой $a\alpha + b\beta = 1$ ($0 < q_1 < q_2$, $a > 0$, $b > 0$).

Решение системы (1) записывается в виде $x(t) = X(t)c + X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$, где $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$; Å – единичная матрица.

Доказаны теоремы о существовании управления, при котором система (1) имеет периодическое решение, доставляющее минимум функционалу, при этом управление может быть как одномерным, так и двумерным.

Определены зависимость функционала от управления, область определения функционала, управление и, следовательно, решение, доставляющее минимум функционалу.

Рассмотрены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

О полиномиальных вариантах решения задачи об F-выполнимости булевых формул

Поцелуевская Евгения Александровна

аспирантка

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

potseluevskaya@gmail.com

Введение

На сегодняшний день в основе многих систем обеспечения информационной безопасности лежат различные NP-полные задачи, не решаемые в общем случае за полиномиальное время.

Одной из них является проблема формульной выполнимости, используемая в системах парольной защиты. Однако, несмотря на то, что в общей постановке данная задача не может быть решена за полиномиальное время, для неё могут быть выявлены подклассы задач, решаемых за полиномиальное время с большой вероятностью. Выявление подобных случаев равносильно определению слабых мест в системе защиты, которые могут быть использованы злоумышленником для проникновения в информационную систему.

Постановка задачи

В общем случае задача о F-выполнимости булевых формул ставится следующим образом. Пусть $F = \{F_1, \ldots, F_t\}$ - любое конечное множество формул (функциональных символов). Определим F-формулу как конъюнкцию $Fi_1(\cdot) Fi_2(\cdot) \ldots Fi_k(\cdot)$ с переменными $x_1, \ldots, x_n$, расставленными некоторым образом. Проблема F- выполнимости - это проблема выполнимости F-формул.

Методы

Основным методом исследования данного вопроса послужило введение дополнительных ограничений на заданные функции, позволяющих решать поставленную задачу за полиномиальное время. Был рассмотрен случай, когда все функции Fi_k зависят от трех переменных и заданы таблицей истинности. Для этого случая разработан алгоритм, сочетающий в себе перебор определенного подмножества S переменных x_i и решение для каждого фиксированного набора значений переменных из S полиномиальной подзадачи о 2-выполнимости. В соответствии с данным алгоритмом разработана программа, получающая на вход функции $Fi_1(\cdot), Fi_2(\cdot), \ldots Fi_k(\cdot)$ и порядок расстановки переменных $x_1, \ldots, x_n$, и выдающая ответ, выполнима ли данная формула, и время работы программы.

Результаты

В случае, когда для количества перебираемых переменных m верно $m \le \log_2 |x|$, где $|x|$ – длина входных данных алгоритма, алгоритм решает поставленную задачу за полиномиальное время. В случае же $m > \log_2 |x|$ алгоритм, вообще говоря, не является полиномиальным. Однако значительный объем накопленных статистических данных показывает, что при таких m в среднем данный алгоритм также решает задачу быстро.

Автор работы выражает признательность В.А. Носову за научное руководство.

Литература

1. Алексеев В.Б., Носов В.А. «NP-полные задачи и их полиномиальные варианты. Обозрение промышленной и прикладной математики», 1997, т.4, вып. 2, с. 165-193.
2. Гизунов С.А., Носов В.А. «Сложность распознавания классов Шеффера». Вестник МГУ, сер. 1, 1995.

Время сходимости к равновесию для модели маршрутизатора в сети TCP[23]

Прохоренков Сергей Павлович[24]

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

msu-serg@yandex.ru

Данный доклад посвящен изучению алгоритма AIMD (Additive Increase Multiplicative Decrease), используемого в современных сетях передачи данных. Аналогичная система рассматривалась, например, в [1].

Пусть состояние системы в момент времени t задается вектором $\mathrm{x(t)=(x_1(t),...,x_d(t))} \in R^d$. Здесь d – число клиентов, а $x_i(t)$ – скорость передачи данных i-м клиентом в момент времени t. Все $x_i(t)$ растут линейно со скоростью v>0. В любой момент времени с интенсивностью $\frac{1}{d}h(x_1+...+x_d)$ происходит уменьшение i-й координаты в α^{-1} раз для любого $i \in \{1,...,d\}$. Рассмотрим последовательность $0 < t_1 < ... < t_n < ...$ моментов времени, в которые произошли сокращения одной из координат. Тогда последовательность $\mathrm{y(n)=x(t_n)} \in R^d$, где $\mathrm{x(t_n)}$ – состояние системы перед n-м сокращением, образует марковский процесс L с дискретным временем. Обозначим переходную функцию процесса L за n шагов как $\mathrm{P}^n(x,dy)$, а стационарную меру для данного процесса как $\pi(dy)$.

Утверждение 1. Пусть для функции f(x)>0 существуют $\varepsilon > 0$, b и конечное $B \in R^d$ такие, что $\int e^{f(y)}\mathrm{P}^1(x,dy) - e^{f(x)} \le -\varepsilon e^{f(x)} + bI(x \in B)$. Тогда существуют C, C_1 и $\lambda > 0$ такие, что $\left\| \mathrm{P}^n(x,dy) - \pi(dy) \right\| \le CC_1^{f(x)}e^{-\lambda n}$, где под $\|\cdot\|$ понимается расстояние по вариации.

Доказательство данного утверждения следует из [2, Теорема 15.4.1].

В данном случае рассмотрим $f(x) = \ln \sum x_i$. Эта функция удовлетворяет условию утверждения 1. Определим K(N)-урезание цепи L как марковский процесс L(N) на пространстве $X(N) = \{x_i > 0, \sum x_i \le K(N)\}$ с переходными вероятностями $\mathrm{P}_{L(N)}(x,dy) = \dfrac{\mathrm{P}(x,dy)I(\sum y_i \in X(N))}{\mathrm{P}(x,X(N))}$ и стационарной мерой $\pi_{L(N)}(dy)$.

Утверждение 2. Если условие утверждения 1 выполнено для процесса L и функции f(x), то для этого же набора параметров оно выполнено и для L(N) и f(x).

По аналогии с [3] определим минимальное время сходимости к равновесию для последовательности L(N) как функцию T(N) такую, что для любой $\varphi(N) \uparrow \infty$ выполнено $\limsup_x \left\| \mathrm{P}_{L(N)}^{T(N)\varphi(N)}(x,dy) - \pi_{L(N)}(dy) \right\| = 0$ и $\limsup_x \left\| \mathrm{P}_{L(N)}^{T(N)/\varphi(N)}(x,dy) - \pi_{L(N)}(dy) \right\| \ne 0$ при $N \to \infty$.

Утверждение 3. Для последовательности урезаний L(N) верно, что $T(N) = \ln(K(N))$.

Литература

1. Богоявленская О.Ю., Манита А.Д., Прохоренков С.П. Вероятностная модель маршрутизатора в сетях TCP/IP. Математические вопросы кибернетики, т.17, 235-246, 2008.
2. Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov chains and stochastic stability. Springer, London, 1993.
3. Манита А.Д. Время сходимости к равновесию в цепях Маркова с большим числом состояний. Фундаментальная и прикладная математика, т.5, в.4, стр.1135-1157, 1999.

[23] Тезисы доклада основаны на материалах исследований, проведенных в рамках гранта Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 09-01-00761.)

[24] Автор выражает признательность к.ф.-м.н. Маните А.Д. за помощь в изучении данной модели.

Инвариантные свойства кодирований состояний автоматов

Родин Сергей Борисович
Младший научный сотрудник
МГУ имени М.В. Ломоносова, лаборатория ПТК, Россия,Москва
sergei_rodin@mail.ru

В работе изучаются кодирования автоматов. Как известно, каждое кодирование приводит к некоторому булевскому оператору. Данный оператор может рассматриваться как набор булевских функций. В данной работе изучался вопрос, когда кодирование приводит к набору линейных булевских функций.

Определение 1: Нумерованной переходной системой назовем тройку (A,Q,φ), где A – входной алфавит, $Q=\{0,...,n-1\}$, φ – функция переходов.

В работе изучаются нумерованные переходные системы с входным алфавитом $A=E_2$.

Определение 2: Кодированием множества $Q=\{0,...,n-1\}$ назовем взаимнооднозначное отображение $f:\{0,...,n-1\}\to E_2^k$. Каждое кодирование f, как для переходной системы, так и для подстановки s на множестве Q порождает булевский оператор [1].

В дальнейшем будем рассматривать переходные системы с числом состояний равным степени двойки $n=2^k$. И исследовать кодирования, задающие отображение множества состояний в коды длины k.

Определение 3: Кодирование $f:\{0,...,n-1\}\to E_2^k$ назовем стандартным, если код элемента есть его двоичное представление и обозначим его через f_0

Определение 4: Перестановкой, соотвествующей кодированию f, назовем перестановку s_f на множестве $\{0,...,n-1\}$ такую, что $s_f(i)=f_0^{-1}(f(i))$.

Поскольку мы ограничили себя алфавитами состояниями мощности степени двойки, то подстановки индуцированные элементами входного алфавита, представляют собой функции одного переменного над E_{2^k}. И, следовательно, есть многочлены над полем Галуа F_{2^k}. При этом каждая подстановка представляется многочленом единственным образом.

Обозначим через P_n множество подстановок на множестве E_n.

Обозначим через H_+ перестановки, соответствующие многочленам $x+c$ над полем Галуа F_n, где $c\in E_n$ - константа. Обозначим через $H_L=\{s\in P_n, sH_+=H_+s\}$.

Теорема 1: Подстановкам, представляемым многочленами над полем Галуа F_n, являющимися линейными комбинациями над $<x^{2^i}>, i\in\{0...k\}$, при стандартном кодировании соответствует линейный оператор.

Теорема 2: Оператор, соответствующий подстановке s при стандартном кодировании, линеен тогда и только тогда, когда $s\in H_L$.

Теорема 3: Пусть s_0,s_1 – порождающие внутренней полугруппы переходной системы. Переходная система имеет линейную реализацию тогда и только тогда, когда либо s_0, либо s_1 имеют линейную реализацию при некотором кодировании f, и порождающие s_0,s_1 принадлежат одному правому классу смежности P_n по $s_f^{-1}H_+s_f$.

Литература

1. Родин С.Б., Переходные системы с максимальной вариантностью относительно кодирования состояний. Интеллектуальные системы. Т.4, вып. 3-4. С.335-352.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику -М.:Наука, 1979.

Оценки гладкости p-адических масштабирующих функций

Родионов Евгений Анатольевич
Студент
Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе, геофизический факультет, г. Москва, Россия
evgeny_980@list.ru

Пусть операции $\oplus$ и Θ определены по p-арным разложениям чисел из $\mathbb{R}_+$ (см., например, [1], [2]). В работе [1] найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых p-адическое масштабирующее уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{p^n-1} c_k \varphi(px\Theta k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

имеет решение $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ со следующими свойствами: 1) $\operatorname{supp}\varphi = [0, p^{n-1}]$, 2) $\{\varphi(\cdot \oplus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$, 3) φ генерирует кратномасштабный p-анализ в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Модуль непрерывности функции φ определяется равенством

$$\omega(\varphi, \delta) := \sup\left\{ |\varphi(x \oplus y) - \varphi(x)| \ : \ x, y \in [0, p^{n-1}) \right\}, \ 0 \le y < \delta, \ \ \delta > 0 .$$

Если функция φ такова, что $\omega(\varphi, p^{-j}) \le Cp^{-\alpha j}$, $j \in \mathbb{N}$, для некоторого $\alpha > 0$, то существует константа $C(\varphi, \alpha)$ такая, что

$$\omega(\varphi, \delta) \le C(\varphi, \alpha)\delta^{\alpha} . \tag{2}$$

Обозначим через α_φ точную верхнюю грань множества всех значений $\alpha > 0$, для которых выполнено неравенство (2). Значения величины α_φ для случаев $p = n = 2$ и $p = 2$, $n \le 3$, вычислялись в работах [2] и [3]. В докладе будут приведены точные значения величины α_φ в случаях $p = 2, n = 4$ и $p = 3, n = 2$. Оценки сверху получаются с помощью совместного спектрального радиуса специальных матриц, определяемых по коэффициентам масштабирующего уравнения (1) (для всплесков на прямой $\mathbb{R}$ аналогичный метод изложен в [4]). В доказательствах оценок снизу существенно используются разложения p-адических масштабирующих функций в ряды Уолша (см. [2]). Предполагается привести также некоторые асимптотические оценки величины α_φ.

Автор благодарит Ю.А. Фаркова за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Farkov Yu.A. On wavelets related to the Walsh series // J.Approx. Theory. In press, doi: 10.1016/j.jat.2008.1003.
2. Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. N 3. С. 193-220.
3. Протасов В.Ю., Фарков Ю.А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197. N 10. С. 129-160.
4. Протасов В.Ю. Фрактальные кривые и всплески // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70. N 5. С. 123-162.

О финитной абсолютной непрерывности мер, порожденных операторами вторичного квантования

Рябов Георгий Валентинович
Институт математики НАН Украины

Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство и ξ – обобщенный гауссовский случайный элемент в H со средним значением 0 и единичным корреляционным оператором. Каждому линейному ограниченному оператору C в H с $\|C\| \le 1$ отвечает оператор вторичного квантования $\Gamma(C)$, действующий в пространстве интегрируемых с квадратом случайных величин, измеримых относительно ξ, по следующему правилу: величине α с разложением Ито-Винера $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\xi,...,\xi)$ он ставит в соответствие случайную величину $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(C\xi,...,C\xi)$.

Известно [1], что любому случайному элементу η в полном метрическом сепарабельном пространстве X оператор вторичного квантования $\Gamma(C)$ ставит в соответствие набор вероятностных мер $\{\mu(\omega,\cdot), \omega \in \Omega\}$ на X такой, что для каждой измеримой ограниченной функции $f: X \to R$ выполняется равенство

$$\Gamma(C) f(\eta)(\omega) = \int_X f(u)\mu(\omega, du).$$

Пусть теперь (H, B, μ) - абстрактное винеровское пространство и $\xi\_$ - случайный элемент в B, отвечающий ξ.

Теорема. Для того, чтобы все меры $\{\mu(\omega,\cdot), \omega \in \Omega\}$ были финитно абсолютно непрерывны [2,3] относительно μ, необходимо и достаточно, чтобы C был оператором Гильберта-Шмидта.

Литература

1. Dorogovtsev A.A. Stochastic anticipating boundary value problems. Doklady Math. Vol.77, num. 1, 2008, pp.76-79
2. Dorogovtsev A.A. Measurable functionals and finitely absolutely continuous measures on Banach spaces. Ukr. Math. Journ., vol. 52, num.9, 2000, pp. 1366-1379
3. Рябов Г.В. Финитная абсолютная непрерывность гауссовских мер на бесконечномерных пространствах. Укр.матем. журн., том 60, №10, 2008, 1367-1377.

Приближенное решение задачи об опасной близости

Скиба Елена Александровна

Аспирантка

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия

lenaskiba@gmail.com

В работе исследуется задача о поиске движущихся объектов, которые могут столкнуться с движущимся объектом-запросом, где под столкновением понимается нахождение объектов в опасной близости.

Пусть заданы две функции f: $[0, \tau_{max}] \to [0,1]$ и f_q: $[0, \tau^q_{max}] \to [0,1]$, называемые законами движения объектов и объектов-запросов, соответственно. Считаем, что имеется счетное множество объектов, движущихся на плоскости таким образом, что их координаты в зависимости от времени задаются парой $(f(t- t_i),y_i)$, где $i \in N$, y_i □ $[0,1]$, а t_i образует строго возрастающую последовательность положительных чисел. Аналогично, движение объекта-запроса задается парой $(x, f_q(t- t_0))$, где $x \in [0,1]$, $t_0 \ge 0$. Библиотекой в момент t_0 назовем множество $V(t_0)$ объектов i, таких что $(f(t_0- t_i), y_i) \in [0,1]\times[0,1]$.

В задаче требуется для произвольного запроса перечислить все объекты из библиотеки, с которыми он в процессе своего движения будет находиться на расстоянии меньшем, чем p по Манхэттену.

Основными характеристиками алгоритма решения этой задачи являются сложность поиска, измеряемая в элементарных арифметических операциях и операциях сравнения, сложности вставки и удаления объектов в динамической БД, а также объем памяти.

Предположим, что алгоритм может выдавать в качестве ответа не только решение задачи, но и некоторое количество "лишних" объектов, то есть решать задачу с погрешностью. Такое предположение позволяет существенно снизить сложность и объем алгоритма.

В [1] рассматривался случай фиксированных скоростей объектов, то есть $f(\tau) = v\tau$, а $f_q(\tau) = v_q\tau$.

Теорема. Пусть выражение $f'(t+t')-f_q'(t)$ не меняет знака для любого $t\in[0,\tau^q_{max}]$ и любого t', такого, что $t+t'\in [0,\tau_{max}]$. Тогда существует алгоритм, решающий задачу об опасной близости с малой относительно размера библиотеки погрешностью, за счет которой достигаются логарифмическая относительно размера библиотеки сложность поиска, вставки и удаления, и линейный объем памяти.

Работа выполнена на кафедре МаТИС Мехмата МГУ.

Литература

1. Е.А.Скиба. Логарифмическое решение задачи об опасной близости - Интеллектуальные системы, том 11, вып. 1-4, 2007.
2. Э.Э. Гасанов, В.Б. Кудрявцев. Теория хранения и поиска информации - М.: Физматлит, 2002.

О конструктивной характеризации пороговых функций

Соколов Андрей Павлович
Младший научный сотрудник
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет, Москва, Россия
sokolov@intsys.msu.ru

Пороговые функции алгебры логики представляют интерес в связи с простотой технической реализации, а также благодаря своим вычислительным возможностям.

Средством задания пороговых функций являются линейные формы вида $x_1w_1+...+x_nw_n-\sigma$. Вводится понятие сигнатуры пороговой функции f как набор знаков коэффициентов некоторой линейной формы, задающей f. Оказывается, что отношение равенства сигнатур разбивает множество существенных пороговых функций на 2^n взаимно непересекающихся равномощных классов, одним из которых является класс монотонных пороговых функций.

В работе исследуется сложность преобразования одной пороговой функции, заданной линейной формой, к другой, путем последовательного изменения коэффициентов линейной формы. В качестве меры сложности принимается изменение коэффициента или свободного члена линейной формы на единицу. Для характеризации сложности обучения в худшем случае вводится шенноновская функция $\rho(n)$. Она говорит о том, сколько минимально достаточно выполнить единичных модификаций исходной линейной формы от n переменных для задания желаемой пороговой функции. В работе показывается, что при стремлении n к бесконечности величина $\log\rho(n)$ растет по порядку как $n\log n$.

Для любой пороговой функции существует бесконечное множество задающих ее линейных форм. Линейные формы назовем эквивалентными, если они задают одну и ту же пороговую функцию. Множество всех существенных линейных форм с целочисленными коэффициентами и свободным членом, задающих пороговую функцию f, обозначим $U(f)$. Легко видеть, что множество $U(f)$ замкнуто относительно операции сложения линейных форм. В работе доказано, что всякое множество $U(f)$ содержит единственный базис относительно операции сложения линейных форм, который является счетным и разрешимым, а также описан алгоритм, который строит данный базис.

Литература

1. Hastad J. - On the size of weights for threshold gates, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1994.

О случайных процессах с самоподобными траекториями

Султанова Лилия Рамилевна

Аспирант кафедры математики

Уфимский государственный авиационный технический университет,

естественно-научный факультет, Уфа, Россия

lilishoma@yandex.ru

Случайный процесс $f(t)$, определенный на отрезке $[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, с масштабирующим параметром $0<H<1$ и основанием $r\geq 4$, будем называть *непрерывным однородным случайным процессом с самоподобными траекториями*, если он удовлетворяет следующим условиям.

При каждом N существуют случайные величины $T_{N,k}=\pm 1$, $k=0,\dots r^N-1$, такие что:

a) $P(T_{N,k}=1)=(r^N+r^{NH})/(2r^N)$, $P(T_{N,k}=-1)=q=(r^N-r^{NH})/(2r^N)$, при этом вероятности $P(T_{N,0}=y_0,\dots,T_{N,r^N-1}=y_{r^N-1})$, где $y_m=\pm 1$, одинаковы для всех перестановок $T_{N,0},\dots,T_{N,r^N-1}$ случайных величин $T_{N,k}$, $k=0,\dots r^N-1$;

b) $\sum\limits_{i=0}^{r^N-1} T_{N,i}=r^{NH}$ (r^{NH} должно быть целым);

c) С вероятностью 1 для любых $h: 0\leq h\leq r^{-N}$, $t_{N,k}=kr^{-N}$, справедливы равенства $f(t_{N,k}+h)-f(t_{N,k})=T_{N,k}r^{-NH}f(r^N h)$, $k=0,\dots r^N-1$, $N=1,2,\dots$

Пусть $x(i)=T_{1,i}$, $i=\overline{0,r-1}$. Известно ([1,2]), что множество $\{H,r,x(i), i=\overline{0,r-1}\}$ полностью определяет данный случайный процесс и поэтому называется *структурой* случайного процесса $f(t)$.

В работе [3] найдено совместное распределение случайных величин $x(k)$, $k=0,\dots r-1$:

$$p(x(0)=y_0,\dots x(r-1)=y_{r-1})=\begin{cases} 1\Big/C_r^{(r-r^H)/2}, & \text{при } \sum\limits_{k=0}^{r-1} 1\{y_k=1\}=(r+r^H)/2; \\ 0, & \text{при } \sum\limits_{k=0}^{r-1} 1\{y_k=1\}\neq (r+r^H)/2, \end{cases}$$

которое определяет все конечномерные распределения данного случайного процесса, и вычислены некоторые числовые характеристики. В частности, математическое ожидание $Ef(t)=t$, а ковариация равна:

$$\operatorname{cov}\left[f(t_1),f(t_2)\right]=(t_1\wedge t_2)\frac{r^{2N}-r^{2NH}}{r^{2NH}\left(r^N-1\right)}-t_1t_2\left(1-\frac{r^{2NH}-r^N}{r^{2NH-N}\left(r^N-1\right)}\right).$$

Для непрерывного случайного процесса с самоподобными траекториями $f(t), f(0)=0$, $f(1)=1$, $t \in [0,1]$, и параметром $H = 1/2$ (например, для координатной функций кривой Пеано), математическое ожидание, ковариация и дисперсия имеют такой же вид, что и соответствующие числовые характеристики процесса броуновского моста $B(s)$, $s \in [0,1]$, закрепленного в точках $B(0)=0$ и $B(1)=1$.

Литература

1. Kono N., On self-affine functions. -Japan Journal of Applied Mathematics, vol. 3, No. 2, 1986.
2. Kono N., On self-affine functions 2. - Japan Journal of Applied Mathematics, vol. 5, No. 3, 1988.
3. Насыров Ф.С., Султанова Л.Р. Об одном классе случайных процессов с самоподобными траекториями. //Вестник УГАТУ. 2005, Т.6 С. 20-25.

Индекс производственной функции Кобба-Дугласа

Сысоев Антон Сергеевич
Студент
Липецкий государственный технический университет,
факультет автоматизации и информатики, Липецк, Россия
simfolipetsk@mail.ru

Производственная функция (ПФ) – экономико-математическая модель, устанавливающая закономерную, относительно устойчивую количественную связь между входом и выходом исследуемого производственного комплекса. Такая модель может включать одно значение входа, и, тогда мы имеем дело с однофакторной ПФ, либо же несколько входных значений – многофакторная ПФ. Построением и исследованием экономико-математических моделей, описывающих влияние факторов на результирующий показатель, и оценкой оказываемого этими факторами влияния занимается экономический факторный анализ.

Пусть задана многофакторная ПФ вида $y = f(x_1,...,x_n)$. В связи с предположением о существовании альтернативной формы математического анализа, в которой изменение величин рассматривается в форме отношения (а не приращения, как в классическом анализе), возникает задача [1] – получить теорему конечных приращений Лагранжа (одну из ключевых теорем анализа) как зависимость индекса результирующего показателя от индексов факторов:

$$iy = \prod_{i=1}^{n} (ix_i)^{\lambda_i}, \qquad (1)$$

где iy - индекс результирующего показателя, ix_i - индекс i-го фактора, λ_i - эластичность результирующего показателя по отношению к i-му фактору.

Частным случаем многофакторной ПФ является двухфакторная функция Кобба-Дугласа (2), предложенная Ч. Коббом и П. Дугласом для описания связи между объёмом выпуска ресурсов и двумя факторами – трудовыми ресурсами (L) и производственными фондами ($\tilde{N}$) экономики США 20 гг. XX в. [2]:

$$y = A \cdot L^{\lambda_1} \cdot \tilde{N}^{\lambda_2}. \qquad (2)$$

Величины λ_1 и λ_2 - частные эластичности: $\lambda_k(x_i) = \dfrac{f'(x_i)\cdot x_i}{f(x_i)}$. Экономический смысл эластичности функции заключается в том, что она является коэффициентом пропорциональности между изменениями величины показателя (функции) и фактора (аргумента), влияющего на этот показатель в краткосрочном периоде времени.

Учитывая сказанное, индекс ПФ Кобба-Дугласа можно представить в виде:

$$iy = iL^{\lambda_1} \cdot i\tilde{N}^{\lambda_2}. \qquad (3)$$

Таким образом, получено выражение для представления зависимости индекса результирующего показателя от индексов факторов модели (1), в частности для ПФ Кобба-Дугласа (3).

Литература

1. Сысоев А.С. (2008) Представления формулы конечных приращений Лагранжа в экономическом факторном анализе // Сборник тезисов докладов XI Региональной молодежной и инженерной выставки «Шаг в будущее, Центральная Россия». – Липецк: ЛГТУ, 2008 г.
2. Макконел Кэмпбелл Р., Брю Стэнли Л. (1992) Экономикс: Принципы, проблемы и политика / К. Р. Макконел, С. Л. Брю. В 2 т.: Пер. с англ. 11-го изд. Т. 2. – М.: Республика, 1992. – 400 с.

Оптимальная стратегия управления производством и модернизацией

Теплов Василий Николаевич
Студент Механико-математического факультета
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
teplov.vasiliy@gmail.com

Рассматривается система управления производством и модернизацией продукции. Обычно эти два процесса не связаны, если только нет причин предлагать новые изделия взамен отремонтированных. В данном случае нужно брать во внимание возможную потерю части прибыли из-за такой продажи. Но она может быть выгодна, если цена за хранение превосходит потерю при такой замене.

Изучаемая модель представляет собой систему изготовления и ремонта изделий при случайном возврате уже использованных. Возвращенные изделия, которые не модернизируются, уничтожаются, что связано с потерями. После принятия решений о количестве изделий, которое нужно произвести – y_M, и количестве изделий, которое нужно модернизировать – y_R, начинается производственный цикл. После его окончания поступают случайные запросы на эти товары. Избыток производства может быть использован для удовлетворения избыточного спроса на модернизированные изделия. Оставшиеся изделия хранятся на складе до следующего этапа, увеличивая тем самым издержки. Фиксированные пусковые затраты не учитываются.

Решается задача выбора для каждого этапа таких y_M и y_R, чтобы итоговая ожидаемая прибыль в случае нескольких производственных циклов (в отличие от [1], где рассматривается один производственный цикл), была максимальна, при начальных запасах x_M и x_R.

Литература

1. K. Inderfurth (2002). Optimal policies in hybrid manufacturing/remanufacturing systems with product substitution. Int. J. Production Economics 20 (2004) 325-343.

Исследование нечеткой устойчивости в одной экономической модели (разделение на торговые зоны)

Тимирова Асия Наилевна[25]
Аспирантка
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
asiya@mail.ru

В работе рассматривается задача оценки связи качества исходной информации и качества решения для математических моделей в экономике на базе аппарата теории нечетких множеств. За основу в работе взята нечеткая модель разделения на торговые зоны. [2].
Пусть X, Z, Y — множества покупателей, фирм и признаков фирм соответственно и пусть $r: X \times Y \to [0,1]$. Функция $r(x, y)-$ степень предпочтения признака y по оценке покупателя x.
По исходным данным – матрицам R (покупатель—признак) и S (признак—фирма) строим матрицу T (покупатель—фирма):
$\underset{[n\times m]}{T} = \underset{[n\times p]}{R} * \underset{[p\times m]}{S}$, где $r_{ij}, s_{ij} \in [0,1]$ и $*$ — либо нормированное умножение $t_{ij} = (\sum_{k=1}^{p} r_{ik} \cdot s_{kj}) \setminus \sum_{k=1}^{p} r_{ik}$, либо минимаксная композиция $t_{ij} = \max(\min(r_{i1}, s_{1j}), \ldots, \min(r_{ip}, s_{pj}))$.
Пусть U — некоторое множество элементов u, и $\mu_A : U \to [0,1]$. *Нечетким множеством* A в U называется множество вида $\{(u, \mu_A(u) : u \in U\}$
Аксиомы степени нечеткости множества: $P1.\ \xi(A) = 0$, когда A — обычное множество; $P2.\ \xi(A_{0,5}) = 1$, где $A_{0,5}$ — матрица, состоящая из 0.5; $P3.\ \xi(A) \le \xi(B)$, если $\mu_A(u) \le \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) < 0.5$ и $\mu_A(u) \ge \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) > 0.5$; $P4.\ \xi(A) = \xi(\overline{A})$ (симметричность по отношению к 0.5) [1].
Степенью нечеткости матрицы A, элементы которой принадлежат $[0,1]$, называется функция $\xi(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{i,j} \mu(a_{ij})$, где $|A|$ — количество элементов в матрице.
Пусть $\Re$ —множество матриц R размера $[n \times p]$, и $\Im$ — множество матриц S размера $[p \times m]$, элементы которых принадлежат отрезку $[0,1]$. Пара $(\Re, \Im)$ *удовлетворяет условию монотонности*, если $\forall R_1, R_2 \in \Re, \forall S \in \Im:\ \xi(R_1) < \xi(R_2)$ выполнено $\xi(R_1 * S) \le \xi(R_2 * S)$.
Теорема. Если $\Re, \Im$ — все матрицы размера $[n \times p]$ и $[p \times m]$ соответственно, то не существует степени нечеткости, которая сохраняла бы монотонность для (R, S) как в случае нормированного умножения, так и в случае минимаксной композиции матриц.
Таким образом, анализируемая модель не позволяет гарантировать качество результата как функцию качества исходных данных, что требует осторожности при ее практическом применении.

Литература

[1] А.П. Рыжов "Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости". Москва, Диалог-МГУ, 1998.
[2] Й.Леунг "Разделение на торговые зоны в нечетких условиях". Теория возможностей и ее применение. М.:Наука, 1992 - 272с.

[25] Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю А.П. Рыжову

Барицентры множеств в банаховом пространстве с мерой

Тимошкевич Тарас Дмитриевич
Студент
Киевский национальный университет имени Т.Г. Шевченка,
Механико-математический факультет, Киев, Украина
vottak@mail.ru

Пусть X – сепарабельное банахово пространство, и μ – мера, определенная на $\mathcal{B}(X)$.

Барицентр множества A из $\mathcal{B}(X)$ относительно меры μ определен как точка

$$C_\mu(A) = [\mu(A)]^{-1} \int_A x\mu(dx) \in X, \qquad (1)$$

где $\mu(A)$ положительно, а интеграл определен как интеграл Петисса. В докладе мы опишем структуру множества B_μ барицентров всех измеримых множеств положительной меры μ.

Обозначим S_μ выпуклую замкнутую оболочку носителя меры μ. Мы называем полупространством множество следующего вида: $\{x \in X : \langle l, x\rangle \ge a\}$, где $l \in X^*$, $a \in R$.

На меру накладываются следующие условия.

A. Мера μ имеет или первый сильный момент, или второй слабый.
Заметим, что условие **A** – достаточное для существования интеграла Петисса в (1).

B. Граница любого полупространства имеет нулевую меру μ, то есть $\mu(\{x \in X : \langle l, x\rangle = a\}) = 0$ для каждого $l \in X^*$, $a \in R$.

C. Внутренность множества B_μ всех барицентров множеств не пустая.

Теорема 1. При выполнении условий **A-C**:

- множество B_μ всех барицентров множеств совпадает с внутренностью множества S_μ;
- любая точка $x \in \mathrm{int}(S_\mu)$, может быть представлена в форме $x = C_\mu(A)$, где A – это полупространство;
- это представление единственное с точностью до эквивалентности по мере μ, то есть $C_\mu(A) \ne C_\mu(B)$ для любых полупространств A, B таких, что $\mu(A \Delta B) \ne 0$.

Литература

1. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. (1985) Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука.
2. Х. Шефер (1971) Топологические векторные пространства. - М.: Мир.
3. П. Билингсли (1977) Сходимость вероятностных мер. - М.: Наука.
4. В.И. Богачев (1997) Гауссовские меры. - М.: Наука.

Зависимость времени конструирования изображений от числа состояний клеточного автомата

Титова Елена Евгеньевна
Студентка
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет, Москва, Россия
titovaee@yandex.ru

В работе рассматривается задача конструирования изображений клеточными автоматами на прямоугольном экране. В каждую клетку прямоугольного экрана $n \times m$ помещено по одному экземпляру одного и того же автомата A, который будем называть клеточным автоматом. К входам клеточного автомата присоединены выходы автоматов, стоящих в соседних клетках, выход автомата — его текущее состояние. Доопределим нулями крайние входы автоматов n-й строки и m-го столбца. Неопределенные входы автоматов первой строки и первого столбца будем называть свободными входами, а всю эту конструкцию — (n,m)-экраном $S=<A,n,m>$. Также имеется внешний автономный автомат A_e с $(n+m)$ выходами, который генерирует входные последовательности для свободных входов клеточных автоматов. Пара $G=<A_e,S>$, состоящая из экрана и внешнего автомата называется генератором. Задача состоит в построении такого генератора $G=<A_e,S>$, чтобы через некоторое время $T(A_e,S)$ после начала работы внешнего автомата на экране появилась любая заранее заданная конфигурация из нулей и единиц, которая при подаче нулей на свободные входы остается неизменной сколь угодно долго. Такую конфигурацию из нулей и единиц назовем изображением. Тогда экран S — универсальный, $U(n,m)$ — множество всех универсальных (n,m)-экранов. Через $G(S,J)$ обозначим множество генераторов $<A_e,S>$, формирующих изображение J, $J(n,m)$ — множество всех изображений размера $n\times m$. Если $S=<A,n,m>$ — экран, то $Q(S)$ — число состояний клеточного автомата A, $Q(n,m)=\min\limits_{S\in U(n,m)} Q(S)$.

Обозначим $T(S,J)=\min\limits_{<A_e,S>\in G(S,J)} T(A_e,S)$, $T(S,n,m)=\max\limits_{J\in J(n,m)} T(S,J)$,

$T(n,m)=\min\limits_{S\in U(n,m)} T(S,n,m)$, $T(n,m,q)=\min\limits_{S\in U(n,m),Q(S)\le q} T(S,n,m)$.

Показано, что для любого изображения необходимо и достаточно, чтобы клеточный автомат имел 3 состояния. Получены оценки времени конструирования изображений в зависимости от числа состояний клеточного автомата.

Теорема 1 Если $m\ge n\ge 3$, $n,m\in N$, то $Q(n,m)=3$.

Теорема 2 Если $m\ge n\ge 3$, $n,m\in N$, то $T(n,m)=n$.

Теорема 3 Если $m\ge n\ge 3$, $n,m,k\in N$, то $T(n,m,2^{k+1}-1)\le(m-k+2)\cdot \left]\frac{n}{k}\right[+k-1$.

Замечание1 Если $m\ge n\ge 3$, $n,m\in N$, то $T(n,m,3)\le 3nm+1$.

Замечание2 Если $m\ge n\ge 3$, $n,m\in N$ то можно оценить время $T_k(n,m,3)$ построения изображения, содержащего $k\le mn$ точек, обозначим его через $T_k(n,m,3)$, тогда $T_k(n,m,3)\le\min(3k+n+m+5,3nm+1)$.

Автор выражает благодарность Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.

Литература

1. В.Б. Кудрявцев, А.С. Подколзин, А.А. Болотов Основы теории однородных структур. Москва, "Наука", 1990.
2. В.Б. Кудрявцев, С.В. Алешин, А.С. Подколзин Введение в теорию автоматов. Москва, "Наука", 1985.

Оптимальная стратегия в модифицированной модели Нерлофа—Эрроу расходов на рекламу при дополнительных ограничениях.

Тюнина Елена Николаевна
Студент
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
lenat@fromru.com

Проблема нахождения оптимальной стратегии инвестирования в рекламную деятельность активно изучается с начала 1960-х годов. Работы в этом направлении выходят регулярно в литературе по экономической и финансовой математике, исследованию операций и

маркетингу. К настоящему времени существует несколько математических моделей для таких задач, которые различаются наборами условий и факторов, влияющих на результат. Критерием оптимальности, как правило, является наибольшая получаемая прибыль при данных условиях. Во многих случаях это ведет к задачам оптимального управления, для решения которых применяется принцип максимума Понтрягина. При этом незначительные изменения в постановке задачи часто приводят к резкому усложнению решения.
Классическая модель Нерлофа—Эрроу была разработана в [1], затем многократно уточнялась и обобщалась. Так, в работе С.Сэтхи [2] к данной модели было добавлено ограничение на суммарный рекламный бюджет фирмы, а в работе В.Протасова и А.Рождественского [3] классическая модель рассматривалась при дополнительном ограничении на темп расходов средств на рекламу. В данной работе мы рассматриваем комбинацию моделей [2] и [3], а именно к классической модели Нерлофа—Эрроу добавляется оба ограничения: на суммарную величину рекламного бюджета и на темп расхода денег. Доказано, что при любых значениях параметров и при любой функции полезности оптимальная стратегия существует и имеет не более двух точек переключения. Решение разбивается на семь случаев, в каждом из которых оптимальная траектория представляет собой регулярную функцию, которая находится в явном виде.

Литература

1. Nerlove M., Arrow K.J. (1962) Optimal advertising policy under dynamic conditions, Economica, 39. (pp.129-132)
2. Sethi S.P. (1977) Optimal advertising for the Nerlove-Arrow model under a budget constraint, Operational Res. Quarterly., 28, №3 (pp.683-693)
3. Протасов В.Ю., Рождественский А.В. (2009) Оптимальная стратегия в модифицированной модели Нерлофа-Эрроу расходов на рекламу (готовится к печати).

Применение выпуклого анализа к оценке близости вероятностных распределений

Тюрин И.С.

студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

itiurin@gmail.com

Пусть (S, d) – метрическое пространство, M – множество зарядов ограниченной вариации на $\sigma-$алгебре $B(S)$ борелевских подмножеств S. Относительно обычных операций сложения и умножения на скаляр множество D дискретных вероятностных мер является выпуклым подмножеством M.

Функция $g: G \to R$, где G – выпуклое множество, называется квазивыпуклой, если для любых $x, y \in G$ и каждого $\alpha \in (0,1)$ выполнено

$$g(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \max\{g(x), g(y)\}.$$

Пусть W – центрированная случайная величина (с. в.) с единичной дисперсией. Говорят (см. [2]), что W^* имеет распределение W-нулевого смещения, если $EWf(W) = Ef'(W^*)$ для каждой дифференцируемой функции f такой, что левая часть последнего равенства определена.

В настоящей работе доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть даны вещественнозначные функции $h_1, \dots, h_m$, определенные на S. Обозначим $K_\infty = \{\mu \in D : \int h_i d\mu = 0, i = 1, \dots, m\}$, K_j – множество мер $\mu \in K_\infty$, сосредоточенных на не более чем j точках $(j \in N)$. Тогда для произвольной квазивыпуклой функции $g: K_\infty \to R$ имеем

$$\sup\{g(x): x \in K_\infty\} = \sup\{g(x): x \in K_{m+1}\}.$$

С его помощью получена

Теорема 2. Пусть W и W^* – величины, определенные выше. Тогда

$$\sup\{|Ef(W) - Ef(W^*)| : f \in L\} \le \frac{1}{2} E|W|^3, \qquad (1)$$

где L – множество ограниченных функций, удовлетворяющих $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$. Кроме того, равенство в (1) достигается, если W принимает ровно два значения.

Метод Стейна позволяет свести оценку точности гауссовской аппроксимации случайной величины W к оценке близости распределений W и W^* (см. [1]-[4]). Таким образом, неравенство (1) позволяет получить оценку близости в средней метрике распределения нормированной суммы независимых с. в. к нормальному закону, более точную, чем в [3].

Рассматриваются также применения теоремы 1 к проблеме отыскания наименьшей константы в неравенстве Берри-Эссеена.

Литература

1. Chen L., Barbour A. An introduction to Stein’s method. Singapore University Press, World Scientific, 2005.
2. Goldstein L., Reinert G. (1997). Stein's method and the zero bias transformation with application to simple random sampling. Ann. Appl. Prob., vol. 7, N 4, p. 935-952.
3. Raič M. (2003) Normal approximation by Stein's method. Proceedings of the Seventh Young Statisticians Meeting. Metodoloski zvezki, 21, p. 71-97.
4. Rinott Y., Rotar V. (2000). Normal approximations by Stein’s method. Decisions in economics and finance, N 23, p. 15-29.

Задача о разладке для процессов Леви в обобщенной байесовской постановке.

Устинов Филипп Александрович

соискатель

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

г. Москва, Россия

atikin85@mail.ru

В настоящее время во многих приложениях (компьютерные сети, медицина, радиолокация, электронный контроль производства) находит широкое применение задача о разладке. Общая постановка задач о разладке такова: в некоторый момент времени происходит изменение параметров наблюдаемой системы. Необходимо как можно раньше обнаружить это изменение. В классической байесовской постановке момент изменения (разладки) является случайной величиной с известным распределением. Мы рассмотрим обобщенную постановку, где момент изменения будет детерминированным, но неизвестным.

Перейдем к точным определениям. На некотором вероятностном пространстве наблюдается процесс Леви с триплетом характеристик (B, C_0, ν_0). Предположим, что в неизвестный и ненаблюдаемый момент времени θ момент времени этот триплет характеристик меняется на (B, C_1, ν_1). Вероятностную меру при моменте разладке θ будем обозначать P_θ. Момент подачи сигнала тревоги обозначим τ. Будем искать наилучший момент в классе $M_T = \{\tau : E_\infty \tau \ge T\}$.

Оптимальным моментом будем называть момент τ^*, который доставляет минимум в выражении $B(T) := \frac{1}{T} \inf_{\tau \in M_T} \int_0^\infty E_\theta (\tau - \theta)^+ \, d\theta$. Для нахождения оптимального момента введем процесс $\psi_t = \psi_0 L_t + \int_0^t \frac{L_t}{L_s} ds$, где $L_t = \frac{d(P_0 | F_{t}^X)}{d(P_\infty | F_{t}^X)}$ производная Радона-Никодима сужения меры P_0 на сигма-алгебру, порожденную процессом X до момента t, по сужению меры P_∞ на ту же сигма-алгебру. Пользуясь статистикой ψ_t, можно переписать B(T):

$B(T) := \frac{1}{T} \inf_{\tau \in M_T} E_\infty \int_0^\tau \psi_s ds$. Таким образом, мы свели исходную задачу к задаче об оптимальной остановке для марковского процесса ψ_t.

Оптимальным моментом в этой задаче оказывается момент выхода процесса ψ_t на некоторый уровень A(T). Этот уровень A(T) определяется из уравнения $E_\infty \tau_{A(T)} = T$.

Литература

1. Устинов Ф.А.(2009) Асимптотика среднего времени запаздывания в задаче о разладке для базисных процессов Леви в обобщенной байесовской постановке. Успехи Математических Наук, т.64, вып. 1.
2. Устинов Ф.А.(2009) Задача скорейшего обнаружения смены режима для процессов Леви. Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика. №2.

Ручные и дикие автоморфизмы некоторых ассоциативных алгебр конечного ранга

Ушаков Юрий Юрьевич

Магистр I года обучения,

Сибирский федеральный университет,

Институт математики, Красноярск, Россия.

yuron@akadem.ru

Вопросы описания автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры A_n со свободными порождающими $x_1, x_2,\ldots,x_n$ над полем F и полиномиальной алгебры $B_n = F[x_1, x_2,\ldots, x_n]$ изучаются достаточно давно (см. также [1, вопрос 3.3]). Лишь недавно Шестаков и Умирбаев [2], [3] доказали дикость введенных при $n = 3$ автоморфизмов Нагаты и Аника; попытки нового доказательства см. [4]. Известно [5], что их продолжения при $n > 3$, тождественные на остальных переменных, являются ручными автоморфизмами, то есть порожденными элементарными автоморфизмами.

Изучение автоморфизмов алгебры A_n или B_n сводится к изучению автоморфизмов идеала R, который порождают $x_1, x_2,\ldots,x_n$. Показывается, что автоморфизм алгебры R является диким, если он индуцирует дикий автоморфизм фактор-алгебры R/R^k при каком-либо k. С использованием алгоритмического подхода (см. [6]) перечисляются дикие автоморфизмы алгебры R/R^k при небольших k. В частности, показывается, что автоморфизм Аника по модулю R^5 действует как ручной автоморфизм.

Литература

1. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. – Новосибирск, НГУ, 2002.
2. I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev. The Nagata automorphism is wild, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **100**(2003), no. 22, 12561-12563.
3. У. У. Умирбаев. Определяющие соотношения группы ручных автоморфизмов колец многочленов и дикие автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр. ДАН, **407**(2006), №3, 319-324.
4. Kishimoto, Takashi, A new proof of the non-tameness of the Nagata automorphism from the point of view of the Sarkisov program. *Compos. Math*. 144, No. 4, 963-977 (2008).

5. M. K. Smith. Stably tame automorphisms. *J. Pure and Appl.Algebra.* **58**(1989). 209-212.
6. C. K. Gupta, V. M. Levchuk, Yu. Yu. Ushakov. Hypercentral and monic automorphisms of classical algebras, rings and groups. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* 2008, **1**(4) 380-390.

Процесс Леви, который ближе, чем заданный процесс с независимыми приращениями, ко всем процессам Леви

Хихол Семен Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
sahihol@gmail.com

Рассматриваются непрерывные справа, имеющие пределы слева случайные процессы со значениями в пространстве R^d, заданные на конечном интервале $[0,T]$. Распределение процесса X обозначается P_X.

Основной результат работы состоит в том, что для любого семимартингала с независимыми приращениями X найдется такой процесс Леви Y, что для любого процесса Леви Z распределения P_Y и P_Z "ближе", чем распределения P_X и P_Z. Точный смысл "большей близости" пар распределений следующий: для любой выпуклой функции $f:(0,\infty)\to R$ f-дивергенция распределений P_Z и P_Y не больше f-дивергенции распределений P_Z и P_X или, короче, $J_f(P_Z,P_Y)\le J_f(P_Z,P_X)$. Частными случаями f-дивергенций являются такие хорошо известные расстояния между вероятностными распределениями, как расстояние по вариации, квадрат расстояния Хеллингера, информация Кульбака-Лейблера.

Процесс Y строится явно "усреднением по времени" триплета характеристик процесса X, а в случае, когда процесс X не имеет фиксированных моментов разрыва, описывается совсем просто: это процесс Леви, одномерное распределение которого в момент T совпадает с одномерным распределением процесса X в момент T.

Для доказательства результата строится пара вспомогательных процессов Леви L и L' со значениями в R, обладающих следующими свойствами: для всех выпуклых $f:(0,\infty)\to R$ справедливо 1) $J_f(P_Z,P_Y)\le J_f(P_L,P_{L'})$ и 2) $J_f(P_Z,P_X)=J_f(P_L,P_{L'})$. Существенную роль играет доказанная автором формула для процесса плотности распределений семимартингалов с независимыми приращениями, обобщающая хорошо известную формулу для локально абсолютно непрерывного случая.

Кроме того, используется доказанный автором и представляющий самостоятельный интерес критерий "равноудаленности" распределений в двух парах, состоящих из распределений процесса Леви и процесса с независимыми приращениями. "Равноудаленность" понимается здесь как равенство соответствующих f-дивергенций для всех возможных f. Иными словами, приведены необходимые и достаточные условия равенства всех f-дивергенций $J_f(P_X,P_Y)=J_f(P_L,P_M)$ в терминах триплетов характеристик процессов X,Y,L,M, где X и L – процессы Леви, Y и M – семимартингалы с независимыми приращениями, причем X и Y принимают значения в R^d, а L и M принимают значения в $R^{d'}$.

Результат исследования может использоваться в задачах оптимизации на множествах вероятностных мер. Например, пусть L – процесс Леви относительно меры P и необходимо минимизировать f-дивергенцию $J_f(Q,P)$ по множеству вероятностных мер Q, абсолютно непрерывных относительно P и таких, что L – локальный мартингал относительно Q. Для произвольной выпуклой f, по-видимому, среди экстремальных точек не обязательно найдется мартингальная мера, по которой L является процессом Леви. Однако наш результат показывает, что, если экстремум достигается на мере Q', относительно которой L есть процесс с независимыми приращениями, то экстремум будет также достигаться и на некоторой мере $\overline{Q}$, по которой L есть процесс Леви.

Периодические решения дифференциального уравнения первого порядка

Шмонова Марина Александровна

Студентка

Рязанский государственный университет имени С.А.Есенина,

Физико-математический факультет, Рязань, Россия

shmon-marina@yandex.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$\dot{x} = \Phi(t) + F(x), \tag{1}$$

в котором $\Phi(t)$ – непрерывная, периодическая с периодом ω функция, $F(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция при любом $x \in R$.

Ставится задача – определить условия, при которых уравнение вида (1) имеет ω-периодическое решение.

Пусть $M = \sup\limits_{t\in[0,\omega]} \Phi(t)$, $m = \inf\limits_{t\in[0,\omega]} \Phi(t)$, $y_1 = m + F(x)$, $y_2 = M + F(x)$, $\varphi(t,\gamma_0)$ – решение дифференциального уравнения вида (1), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(t_0,\gamma_0) = \gamma_0$.

Доказаны следующие теоремы:

Определение. Пусть $\delta > 0$ - некоторое число, и пусть $\varphi(t,\alpha_0)$ ω-периодическое решение дифференциального уравнения вида (1), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0,\alpha_0) = \alpha_0$. Тогда решение $\varphi(t,\alpha_0)$ уравнения (1) называется устойчивым, если для любого $\alpha \in D = \{\alpha : 0 < |\alpha - \alpha_0| < \delta\}$ выполняется неравенство $(\varphi(\omega,\alpha) - \alpha)(\alpha - \alpha_0) < 0$, и называется неустойчивым, если для любого $\alpha \in D = \{\alpha : 0 < |\alpha - \alpha_0| < \delta\}$ $(\varphi(\omega,\alpha) - \alpha)(\alpha - \alpha_0) > 0$.

Теорема 1. Если существует промежуток $[a,b]$ такой, что для любого $x \in [a,b]$ выполняется одно из неравенств $y_1 \geq 0$ или $y_2 \leq 0$, то для любого $\gamma_0 \in [a,b]$ решение $\varphi(t,\gamma_0)$ уравнения (1) ω-периодическим не является.

Теорема 2. Если существует промежуток $[a,b]$ такой, что справедливы следующие соотношения: $y_1(a) < 0$, $y_2(a) = 0$ и $y_1(b) = 0$, $y_2(b) > 0$ *(или* $y_1(a) = 0$, $y_2(a) > 0$ и $y_1(b) < 0$, $y_2(b) = 0$*)*, то существует $\gamma_0 \in (a,b)$, при котором решение $\varphi(t,\gamma_0)$ уравнения (1) является ω-периодическим.

Теорема 3. Если при любом $x \in [a,b]$ $F'(x) < 0$ *(* $F'(x) > 0$ *)*, то существует единственное число $\gamma_0 \in (a,b)$, такое, что $\varphi(t,\gamma_0)$ – ω-периодическое устойчивое (неустойчивое) решение уравнения (1), при любом $t \in [0,\omega]$ удовлетворяющее неравенствам $a \leq \varphi(t,\gamma_0) \leq b$.

Определена оценка снизу числа периодических решений системы (1).

Сложность реализации некоторых классов Поста информационными графами с монотонным базовым множеством

***Шуткин Юрий Сергеевич*[26]**
аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
yurii.shutkin@gmail.com

Рассматривается задача реализации булевых функций с помощью информационных графов (понятие информационного графа вводится в [1]). Функционал сложности информационного графа соответствует времени работы алгоритма, реализованного этим информационным графом (поэтому еще его называют временной сложностью). Также эта сложность отражает среднее нагревание чипа, имеющего конструкцию контактной схемы и реализующего какую-либо булеву функцию.

В работах [2,3] рассмотрены наиболее общие случаи задачи, а именно были получены оценки сложности реализации булевых функций информационными графами и деревьями в классе всех булевых функций. При этом базовое множество, которое использовалось для построения информационных графов было фиксировано и представляло из себя множество все переменных и их отрицаний (в точности то множество, которое используется при синтезе контактных схем [4]). В данной же работе делается акцент на базовое множество, состоящее только из монотонных функций, в простейшем случае – множество всех переменных. Поэтому далее мы будем говорить о реализации булевых функций информационными графами с монотонным базовым множеством.

В работе показывается явное отличие случая монотонного базового множества от случая немонотонного, которое приводит к росту оценки сложности с линейной до полиномиальной и даже в некоторых случаях до экспоненциальной.

В работе отдельно рассматривается задача реализации булевых функций в классе информационных деревьев. В работах [2,3] можно видеть разницу между оценками сложности в классе информационных деревьев и информационных графов. Так, например, нижняя оценка функции Шеннона сложности реализации булевых функций при прочих равных в два раза слабее в случае графов, чем в случае деревьев. Однако в этих работах не было доказано, что различие асимптотики имеет место. В данной же работе утверждается, что для некоторого класса функций (а именно для класса пороговых функций) сложность реализации булевых функций графами с монотонным базовым множеством имеет полиномиальный порядок, тогда как в классе деревьев порядок экспоненциальный.

Приведены основные оценки сложности реализации, такие как оценка функции Шеннона сложности реализации монотонных булевых функции в классе информационных графов и деревьев с монотонным базовым множеством. Также для почти всех монотонных булевых функций получен порядок сложности реализации их информационными деревьями с монотонным базовым множеством.

Литература

1. Гасанов Э.Э., Кудрявцев В.Б. Теория хранения и поиска информации. // Физматлит, 2002.
2. Шуткин Ю.С. О реализации булевых функций информационными графами. // Дискретная математика, 2008, 20:4, 31-41.
3. Шуткин Ю.С. Синтез информационных графов для предполных классов булевых функций. // Интеллектуальные системы, 2007, 11:1-4, 733-746.
4. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. // МГУ, 1984.

[26] Автор выражает благодарность профессору, д.ф.-м.н. Гасанову Э.Э. за помощь в проведении исследования.

Гомологии и когомологии дополнения к некоторым наборам комплексных плоскостей коразмерности два[27]

Элияшев Юрий Валерьевич
Студент
Сибирский федеральный университет
Институт математики, Красноярск, Россия
eliyashev@mail.ru

В теории многомерных вычетов важным является изучение групп когомологий для дополнений к аналитическим множествам, в частности, к наборам координатных плоскостей [1]. Исследования в области торической топологии [2] позволили построить методы вычисления групп (ко)гомологий дополнений к координатным наборам плоскостей, которые проще универсальных методов и позволяют получать некоторую дополнительную информацию.

Цель данной работы состоит в конструировании базисных гомологических циклов и дифференциальных форм когомологий де Рама для дополнения $C^d \setminus Z$ к следующему набору координатных плоскостей коразмерности два:

$$Z = \bigcup_{i<|i=j|<d-1} \{z_i = z_j = 0\}.$$

Этот набор можно кодировать с помощью некоторого d-угольника P со сторонами $F_1,...,F_d$, пологая

$$Z = \bigcup_{i,j:F_i \cap F_j = \varnothing} \{z_i = z_j = 0\}.$$

Гомологии $C^d \setminus Z$ можно описать в терминах относительных гомологий многоугольника P.

Теорема. Пусть $d \geq 4,$ тогда для $0 < p < d+2$

$$H_p(C^d \setminus Z) \cong \bigoplus_{\substack{|I|=p-1 \\ I\subseteq\{1,..,d\}}} H_1(P, F_I),$$

где $F_I = \bigcup_{i\in I} F_i$, а $|I|$ – мощность множества I.

В доказательстве данной теоремы используются конструкции из [2]. Теорема позволяет предъявить явную геометрическую конструкцию базисных циклов.

Также в работе строится база групп когомологий де Рама $H^p(C^d \setminus Z)$, $0 < p < d+2.$ Оказывается, все базисные формы подходящей заменой координат получаются из форм вида

$$\omega_{k,m} = \omega_{BM}(z_1 \cdot \ldots \cdot z_k, z_{k+1} \cdot \ldots \cdot z_m) \wedge \frac{dz_{k+1}}{z_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_{m-1}}{z_{m-1}},$$

где $\omega_{BM}(w_1, w_2)$ – ядро Бохнера-Мартинелли в $C^2 \setminus \{0\}$.

Литература

1. Shchuplev A., Tsikh A.K., YgerA. Residual kernels with singularities on coordinate planes // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2006, Vol. 253, pp. 256-274.
2. Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2004. – 272с.

[27] Тезисы доклада основаны на материалах исследований, проведенных в рамках гранта президента РФ НШ 2427.2008.1 и грантов СФУ.

Об оценках минимального расстояния для параметров моделей AR(1) и MA(1)

Эрлих Иван Генрихович
аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет, Москва, Россия
erlikh-ivan@yandex.ru

Рассматривается задача построения оценки типа минимального расстояния для параметра стационарной модели авторегрессии первого порядка: $u_i = \beta u_{i-1} + \varepsilon_i$, $|\beta|<1$, $i \in Z$, по наблюдениям $u_1,...,u_n$.

Классическая оценка (см. [1]) $\beta_n := \arg\min\{K_n(t), t \in R\}$ получается минимизацией функционала $K_n(t) = \int [n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} h(u_{i-1})\{I(\varepsilon_i(t) \le x) - F(x)\}]^2 dG(x)$, где $F(x)$ - функция распределения инноваций ε_i, $I(.)$ - индикатор события, $\varepsilon_i(t) = u_i - tu_{i-1}$ - остатки.

В большинстве задач распределение инноваций неизвестно и использование определенной выше оценки невозможно. Поэтому для решения данной проблемы мы использовали подход, описанный в [2] для определения оценок минимального расстояния для параметров ARCH модели. Вместо функционала $K_n(t)$ рассматривается функционал $\hat{K}_n(t) = \int [n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} h(u_{i-1})\{I(\varepsilon_i(t) \le x) - \hat{F}_n(x,t)\}]^2 dG(x)$, где $\hat{F}_n(x,t)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по остаткам.

Показано, что при некоторых ограничениях на моменты инноваций и функции $F(x)$ и $G(x)$ соответствующая оценка $\hat{\beta}_n := \arg\min\{\hat{K}_n(t), |t| \le 1\}$ является $\sqrt{n}$–состоятельной оценкой параметра β и доказана ее асимптотическая гауссовость с таким же предельным распределением, как у β_n.

Доказана робастность построенной оценки с точки зрения равномерной ограниченности функционала влияния (см. [3]).

Аналогичная задача поставлена для MA(1) модели: $u_i = \varepsilon_i - \alpha\varepsilon_{i-1}$. Для ее решения минимум $\hat{\alpha}_n$ функционала $\hat{V}_n(t) = \int [n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{\partial \varepsilon_i(t)}{\partial t}\right)\{I(\varepsilon_i(t) \le x) - \hat{F}_n(x,t)\}]^2 dG(x)$ ищется в $n^{-3/8}$ – окрестности предварительной состоятельной оценки α_n, в качестве которой можно рассмотреть GM-оценку (см. [3]).

Показано, что при некоторых ограничениях на моменты инноваций и функции $F(x)$ и $G(x)$, построенная оценка $\hat{\alpha}_n$ является $\sqrt{n}$–состоятельной оценкой параметра α и доказана ее асимптотическая гауссовость.

Функционал влияния построенной оценки $\hat{\alpha}_n$ совпадает с функционалом влияния предварительной оценки α_n, а значит построенная оценка наследует свойство робастности предварительной оценки.

В будущем предполагается распространить описанную технику для определения оценок минимального расстояния в ARMA модели.

Литература

1. Koul H.L. (1992) Weighted Empiricals and Linear Models // IMS, Hayward, CA.
2. Sorokin A.A. (2004) On The Minimum Distance Estimates in ARCH Model// Math. Mathods of Stat., V.13, №3, p.329-355.
3. Martin R.D., Yohai V.J. (1986) Influence Functional for Time Series // The Ann. of Stat., V.14, №3, p.781-818.

Об управляемости системы дифференциальных уравнений при наличии внешних воздействий

Ясько Елена Михайловна
Студентка
Рязанский государственный университет имени С.А.Есенина,
физико-математический факультет, Рязань, Россия
yasko-elena@yandex.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t,u) + s(t,\mu) + f(t,u,\mu), \tag{1}$$

где x – n-мерный вектор, u – m-мерный вектор-управление, μ – k-мерный вектор. $D(\delta_0) = \{u \in E_m : \ |u| \le \delta_0\}$, $W(\delta_0) = \{\mu \in E_k : \ |\mu| \le \delta_0\}$. $A(t)$ – $n \times n$ – непрерывная на сегменте $[0;1]$ матрица, $b(t,u)$ – непрерывная на множестве $[0,1] \times D(\delta_0)$ m-мерная вектор-функция, $s(t,u)$ – непрерывная на множестве $[0,1] \times W(\delta_0)$ k-мерная вектор-функция, $f(t,u,\mu)$ – n-мерная вектор-функция, $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(t,u,\mu)}{|z|} = 0$ равномерно относительно $t \in [0;1]$, $z = (u,\mu)$, $f(t,0,0) = 0$.

Ставится задача: определить условия существования решения системы (1), удовлетворяющего краевым условиям

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{2}$$

при $|u| + |\mu| \ne 0$.

Систему (1) можно привести к виду $\dot{x} = A(t)x + B(t)u + S(t)\mu + o(|z|) = 0$, где $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{o(|z|)}{|z|} = 0$.

Решение системы (1), удовлетворяющей начальному условию $x(0) = \alpha$ определяется равенством: $x(t) = X(t)\alpha + X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)\left[B(t)u + S(t)\mu + o(|z|)\right]d\tau$, где $X(t)$ – фундаментальная матрица, системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$.

В результате исследования получено уравнение $Cu + D\mu + o(|z|) = 0$, $Cu = \int\limits_0^1 X^{-1}(\tau)B(\tau)u\,d\tau$, $D\mu = \int\limits_0^1 X^{-1}(\tau)S(\tau)\mu\,d\tau$, $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{o(|z|)}{|z|} = 0$, посредством которого определены условия существования решения системы (1), удовлетворяющего заданным краевым условиям (2).

Рассмотрен пример системы (1), исследование которого выполнено на основании изложенной теории.

Новый подход к оценке предсказательной способности моделей реальных данных.[28]

Яськов П.А.
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет, Москва, Россия
yaskov_pavel@mail.ru

Тесты предсказательной способности моделей реальных данных весьма популярны среди эконометристов. Если кто-то предлагает новую модель, то возникает естественная необходимость сравнения этой модели с уже существующими. Такое сравнение возможно с помощью упомянутых тестов. Первое строгое описание подобных тестов было дано в [4]. Впоследствии эта тематика была развита в [3] и [5]. Альтернативный подход к тестированию был предложен в [1].

В данном докладе представлено расширение методов, рассмотренных в [3] и [4]. Как и в [4], мы работаем только с параметрическими моделями, которые верно специфицированы под нулевой гипотезой. Мы предполагаем, что параметры оцениваются обобщенным методом моментов по последним наблюдениям, попадающим в движущееся окно некоторого размера. В отличие от [3], наш подход применим к окнам, растущим медленнее, чем выборка. Это позволяет использовать его для данных, имеющих структурные сдвиги. Последнее сближает настоящую работу с [5], где рассматриваются окна ограниченного размера. В случае, когда структурных сдвигов нет, при некоторых ограничениях на параметры мы демонстрируем, что предлагаемые нами тесты имеют большую мощность, чем тесты из [3].

Ключевую роль в построении наших тестов играют предельные теоремы, дающие нормальную аппроксимацию используемой статистики. Для установления этих теорем мы доказываем ряд утверждений, представляющих самостоятельный интерес. Они дополняют известные результаты Хансена([2]) о сходимости дискретных стохастических интегралов, т.е. сумм определенных произведений случайных величин. Эти утверждения могут рассматриваться как новая форма закона больших чисел для данных интегралов.

Литература

1. Giacomini, R., White, H. (2006) Tests for conditional predictive ability // Econometrica, №74, p. 1545-1578.
2. Hansen, B. (1992) Convergence to stochastic integrals for dependent heterogenous processeses // Econometric Theory, №8, p. 482-500.
3. McCracken, M.W., West, K.D. (1998) Regression based predictive ability tests // International Economic Review, №39, p. 817-840.
4. West, K.D. (1996) Asymptotic inference about predictive ability // Econometrica, №64, p. 1067-1084.
5. White, H. (2000) A reality check for data snooping // Econometrica, №68, p. 1097–1126.

[28] Тезисы доклады основаны на материалах исследований, проведенных в рамках гранта Российского Гуманитарного Научного Фонда (грант № 03-01-00373).

Отделение механики

Победителем подсекции механики признана М.В. Васильева. Победителем представлен для публикации полный текст доклада (приводится ниже вместо тезисов).

Грамотами за лучшие доклады на подсекции механики награждены Васильева М.В., Горчаков А.В., Катушкина О.А., Пленкин А.В., Проворникова Е.А., Прохоренко А.Ю., Синельщиков Д.И., Шатина Л.С.

Трехмерное моделирование теплообмена зданий и сооружений с многолетнемерзлыми грунтами

Васильева Мария Васильевна
Аспирант
Якутский государственный университет имени М.К.Аммосова,
Институт математики и информатики, Якутск, Россия
vasilyeva_mv@mail.ru

Освоение природных богатств и развитие Северо-востока России связано с проектированием, строительством и эксплуатацией различных инженерных сооружений, возводимых на многолетнемерзлых грунтах с учетом их температурного режима. Успешное решение таких задач невозможно без правильного понимания тепловых процессов, происходящих в системе «мерзлый или талый грунт - инженерное сооружение - окружающая среда».

Для моделирования процессов теплопереноса с фазовыми превращениями чистых веществ используется классическая модель Стефана, которая характеризуется заданием постоянной температуры на границе фазового перехода. При численном решении этой модели используются два основных подхода: методы с выделением границы раздела фаз (variable domain methods) и методы без выделения этой границы, т.е. методы сквозного счета (fixed domain methods).

К первой группе относятся методы, в которых положение свободной границы отслеживается на каждом временном слое. Они используют численные методы, в которых свободная граница определяется положением соответствующих узлов. Например, в одномерном случае адаптация к границе раздела фаз может осуществляться за счет использования переменных шагов по времени (ловля фронта в узел сетки). Такие методы плохо приспособлены к решению многомерных задач. Также к первой группе относятся и методы с выпрямлением фронта, когда используется динамическая сетка постоянной структуры с закреплением узлов на границе раздела фаз.

Для многомерных задач с фазовыми переходами использование численных методов с явным выделением границы раздела фаз связано с алгоритмическими сложностями и большими вычислительными затратами. Для приближенного решения таких задач широкое распространение получили методы сквозного счета [1]. Для этого используется обобщенная формулировка классической задачи Стефана, при которой условия Стефана включаются в само уравнение теплопроводности с применением дельта-функции. Выделение или поглощение тепла при фазовом переходе соответствует наличию сосредоточенной теплоемкости на границе фазового перехода.

В связи с этим представляется актуальным исследование нестационарных нелинейных многомерных задач теплопроводности с фазовыми превращениями. Получение практически значимых результатов обеспечивается расчетами на достаточно подробных сетках - миллион и более расчетных узлов. Подобные вычислительные задачи эффективно решаются на современной многопроцессорной вычислительной технике.

Построению параллельных вычислительных алгоритмов для численного решения задач теплопереноса в условиях вечной мерзлоты посвящена данная работа. Программный комплекс позволяет производить расчеты трехмерных задач теплопереноса под сооружениями и зданиями при сезонных колебаниях температуры с учетом фазовых переходов. Комплекс снабжен удобным пользовательским интерфейсом, позволяющим осуществлять интерактивное управление постановкой задачи, контролем хода вычислений и средствами визуализации. Интерфейс реализован в виде клиент-серверного приложения.

Рассматривается модельная двухфазная задача Стефана в трехмерной прямоугольной области Ω, которое описывает динамику температурного поля грунта под основаниями инженерных сооружений. Запишем ее в виде общего уравнения теплопроводности во всей области Ω.

$$\widetilde{C}\rho \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T(x,y,z,t)), 0 < t \le t_{\max}, x \in \Omega, \tag{1}$$

где $T(x,y,z,t)$ – температура породы, °C;

x, y, z – пространственные координаты, м;

t – время, с;

T_f – температура фазовых переходов, °C;

ρ – плотность грунта, кг/м3;

$\widetilde{C}$ – эффективная удельная теплоемкость грунта, Дж/(кг °C);

λ – коэффициент теплопроводности грунта, Вт/(м °C);

$\delta(T)$ - дельта функция;

L – теплота фазовых переходов грунтовой воды, Дж/кг.

Здесь коэффициенты эффективной объемной теплоемкости учитывает фазовые превращения воды в лед и обратно, а коэффициент теплопроводности разрывен (нижние индексы i, w, s соответствуют льду, воде и скелету порового пространства)

$$\widetilde{C}\rho = C\rho + L\rho m\delta(T - T_f),$$

$$C\rho = \begin{cases} C\rho_1, T > T_f, \\ C\rho_2, T \le T_f \end{cases}$$

$$C\rho_1 = (1-m)C\rho_s + mC\rho_w,$$

$$C\rho_2 = (1-m)C\rho_s + mC\rho_i, \tag{2}$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, T > T_f, \\ \lambda_2, T \le T_f, \end{cases}$$

$$\lambda_1 = (1-m)\lambda_s + m\lambda_w,$$

$$\lambda_2 = (1-m)\lambda_s + m\lambda_i,$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями:

$$T(x,y,z,0) = T_0(x,y,z) \tag{3}$$

$T = T_h$, в области оснований зданий,

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_{air} - T), \text{ на верхней границе,}$$
$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \text{ на боковых гранях,} \qquad (4)$$
$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \gamma, \text{ на нижней границе,}$$

где

α - коэффициент теплообмена, Вт/(м °С);

T_{air} – температура наружного воздуха, °С;

T_h - температура под основанием здания, °С;

γ - геотермический градиент;

При численном решении поставленной нестационарной краевой задачи заменим дельта-функцию $\delta(T)$ некоторой функцией $\delta(T,\Delta)$, которая отлична от нуля только внутри интервала сглаживания $(-\Delta,\Delta)$ [2]. В качестве аппроксимации для $\delta(T,\Delta)$ возьмем следующую формулу, которая построена из условия сохранения тепла на интервале $(-\Delta,\Delta)$

$$\delta(T,\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, |T| \le \Delta, \\ 0, |T| > \Delta. \end{cases}$$

Параметр сглаживания Δ зависит от используемой сетки и определяется эмпирически в результате методических расчетов.

Для решения задачи (1), (3), (4) введем в расчетной области равномерную сетку

$$\Omega = \overline{\omega}_x \times \overline{\omega}_y \times \overline{\omega}_z \times \overline{\omega}_t$$

состоящую из компонент

$$\overline{\omega}_\alpha = \{\alpha = \alpha_i = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0,1,\dots,N_\alpha, h_\alpha = 1/N_\alpha\}, \alpha = x,y,z$$

и

$$\overline{\omega}_t = \{t = t_j = j\tau, i_\alpha = 0,1,\dots,N_t, \tau = T/N_t\}.$$

На этой сетке аппроксимируем уравнение (1) чисто неявной разностной схемой [4]

$$\widetilde{C}\rho(T)_{i,j,k} \frac{T_{i,j,k} - \breve{T}_{i,j,k}}{\tau} = \lambda(T)_{i+1/2,j,k} \frac{T_{i+1,j,k} - \breve{T}_{i,j,k}}{h_x^2} - \lambda(T)_{i-1/2,j,k} \frac{T_{i,j,k} - \breve{T}_{i-1,j,k}}{h_x^2} +$$
$$\lambda(T)_{i,j+1/2,k} \frac{T_{i,j+1,k} - \breve{T}_{i,j,k}}{h_y^2} - \lambda(T)_{i,j-1/2,k} \frac{T_{i,j,k} - \breve{T}_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \qquad (5)$$
$$\lambda(T)_{i,j,k+1/2} \frac{T_{i,j,k+1} - \breve{T}_{i,j,k}}{h_z^2} - \lambda(T)_{i,j,k-1/2} \frac{T_{i,j,k} - \breve{T}_{i,j,k-1}}{h_z^2}.$$

Реализация нелинейной разностной схемы (5) осуществляется на основе последовательного уточнения коэффициентов. На каждой итерации решается линейная краевая задача для эллиптического уравнения. Как правило, достаточно нескольких итераций, чтобы обеспечить хорошую точность.

Для численного решения линеаризованной чисто неявной разностной схемы строится итерационный процесс сопряженных градиентов с предобуславливателем Якоби. Для реализации предложенного численного алгоритма на многопроцессорных вычислительных системах, необходимо применить один из подходов распараллеливания соответствующего однопроцессорного численного алгоритма [5]. Наиболее эффективным в настоящее время для многомерных задач механики сплошной среды и многопроцессорных вычислительных систем с распределенной памятью считается принцип геометрического параллелизма, который предполагает проведение декомпозиции расчетной области на равные (по числу узлов сетки) подобласти соответственно числу процессоров. Учитывая прямоугольность исходной расчетной области, можно применить декомпозицию трех типов: линейную, квадратную и кубическую. Первая предполагает разбиение области по одной из трех координат, вторая — по двум координатам, третья — по трем (рис. 1).

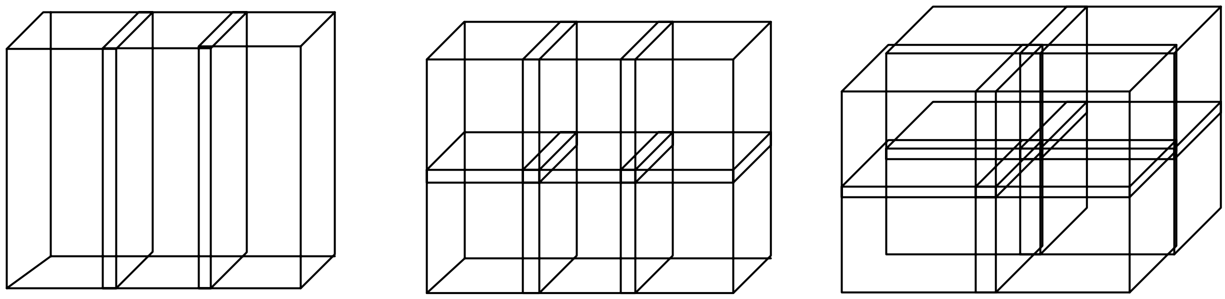


рис. 1

Поясним сказанное. При линейном разбиении области по одной из координат (например, по координате y) k-ый процессор вычисляет решение в диапазоне узлов

$$I^{(k)} = \{(i_x, i_y, i_z), i_x = 0,..., N_x, i_y = i_{y0}^{(k)},..., i_{y1}^{(k)}, i_z = 0,..., N_z\} \equiv I_x \times I_y^{(k)} \times I_z .$$

При этом полосы берутся с перекрытием. Топология межпроцессорных связей в этом случае будет линейной, поскольку для вычисления очередного значения на процессоре k необходимо получить требующиеся значения от соседних процессоров (k-1) и (k+1).

В случае «квадратного» разбиения области изменяется диапазон индексов

$$I^{(k)} = \{(i_x, i_y, i_z), i_x = 0,..., N_x, i_y = i_{y0}^{(k)},..., i_{y1}^{(k)}, i_z = i_{z0}^{(k)},..., i_{z1}^{(k)}\} \equiv I_x \times I_y^{(k)} \times I_z^{(k)} .$$

Соответственно изменяется и топология обменов и межпроцессорных связей, которые образуют теперь решетку. В этом случае перед началом очередного вычисления k процессор обменивается недостающими данными с четырьмя соседями.

В случае «кубического» разбиения области получим

$$I^{(k)} = \{(i_x, i_y, i_z), i_x = i_{x0}^{(k)},..., i_{x1}^{(k)}, i_y = i_{y0}^{(k)},..., i_{y1}^{(k)}, i_z = i_{z0}^{(k)},..., i_{z1}^{(k)}\} \equiv I_x^{(k)} \times I_y^{(k)} \times I_z^{(k)} .$$

При этом k процессор имеет уже шесть соседей, с которыми и обменивается необходимыми данными.

При численной реализации декомпозиции области возьмем кубическое разбиение, как обобщение всех трех предложенных случаев декомпозиции. Для организации подобных вычислений будем использовать интерфейс передачи данных MPI (Message Passing Interface).

Программный интерфейс солвера реализован в виде web-приложения, которое не требует установки дополнительного программного обеспечения на стороне пользователя, достаточно иметь лишь web-браузер с помощью которого можно конфигурировать, запускать, контролировать и визуализировать расчеты. Интерфейс написан с помощью языка Java (jsp + Servlet), который для расчета вычислений использует класс Runtime для запуска откомпилированного под данную платформу солвера, написанного на языке C. Солвер принимает аргументы, которые задают параметры расчетного метода, и пути к файлам с параметрами расчетной области, начальным распределением и расположением сооружений с их температурой под основанием. При этом все параметры и файлы можно редактировать посредством html-форм (рис. 2).

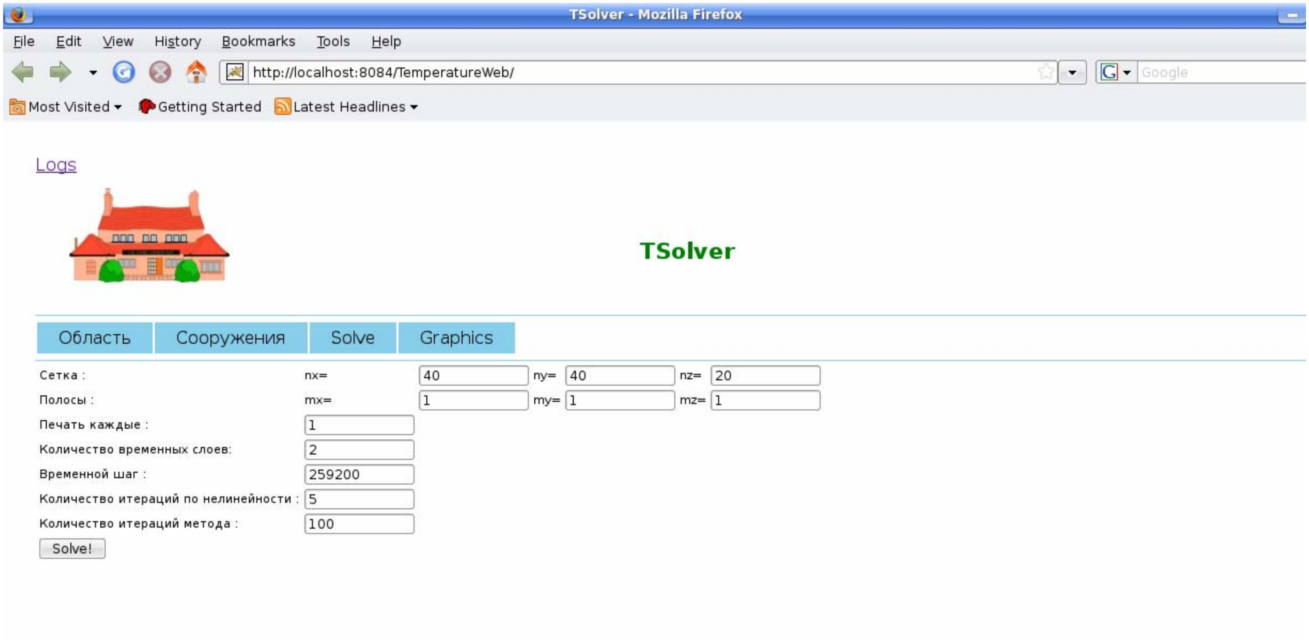


рис. 2

При расчете модельной задачи, рассчитанное температурное поле на заданных временных слоях, записывается в файлы xml-формата. Для визуализации этих данных используется свободно-распространяемый программный продукт ParaView[6]. Для интеграции визуализатора с программным комплексом используется интерфейс на языке Python с библиотекой Server Manager от Paraview (рис. 3).

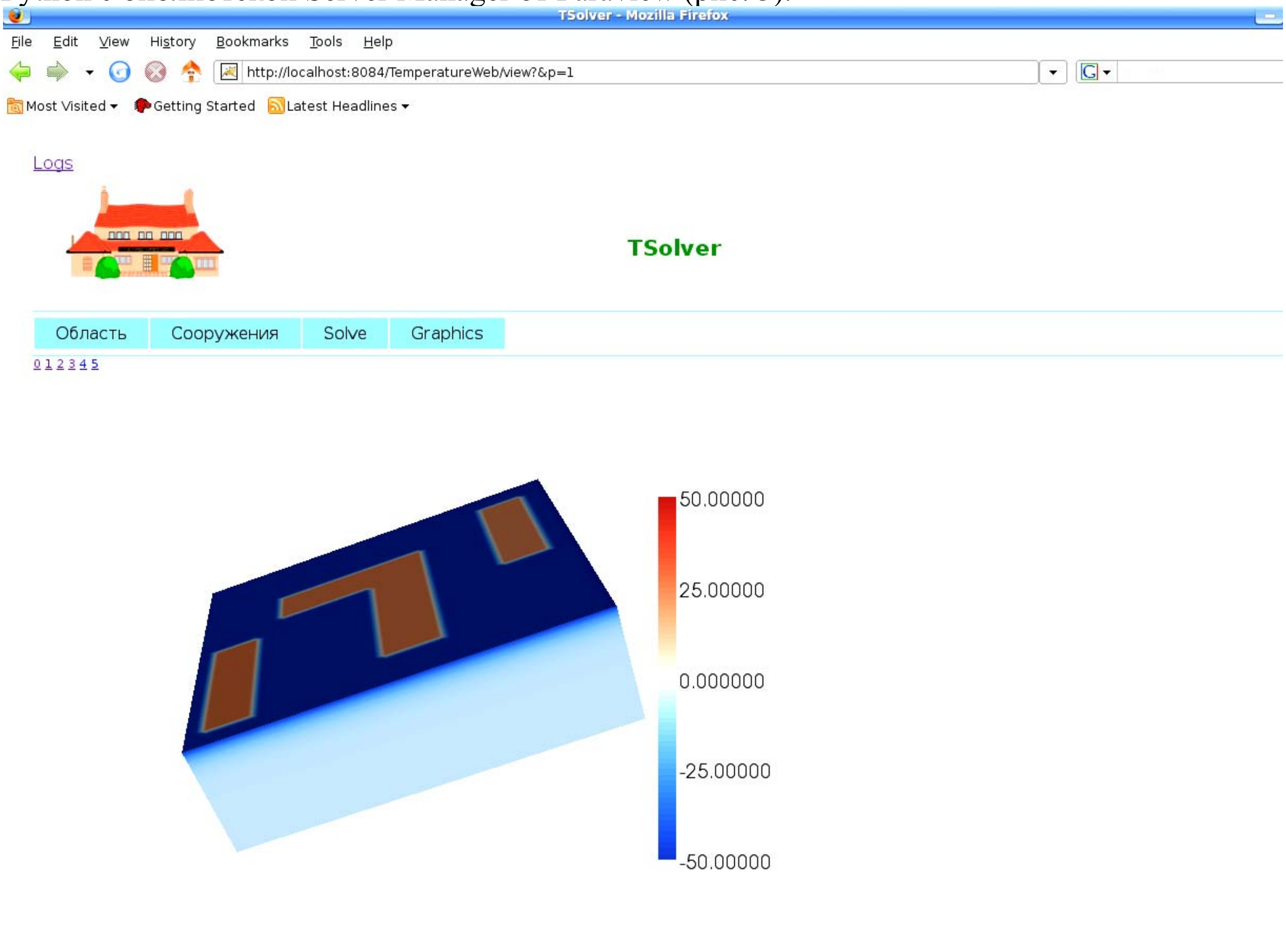


рис 3.

Программный продукт был установлен на кластере Якутского государственного университета, состоящего из четырех восмиядерных узлов. В качестве реализации MPI была выбрана реализация OpenMPI[7].

Приведем результаты некоторых модельных расчетов. В качестве области был выбран параллелепипед с длинами сторон 80м., 65м. и 25 м., соответственно осям x, y, z. Температура наружного воздуха менялась по синусоиде с максимальным значением +35 °C в летнее время и минимальным -55 °C в зимнее. Расчеты проводились для ~2 миллионов неизвестных. При расчетах запускалось 32 параллельных процесса.

На рис. 4 представлены расчеты для температурного поля под тремя зданиями различной формы. Время счета заняло примерно 5 часов. Рассчитывалось 1800 временных слоев с шагом в три дня, что соответствует 15 годам.

На рис. 5 рассчитывались чаши протаивания для двух близко расположенных сооружений с одинаковыми температурами оснований. Время счета заняло примерно 10 часов для 3900 временных слоев с шагом в три дня.

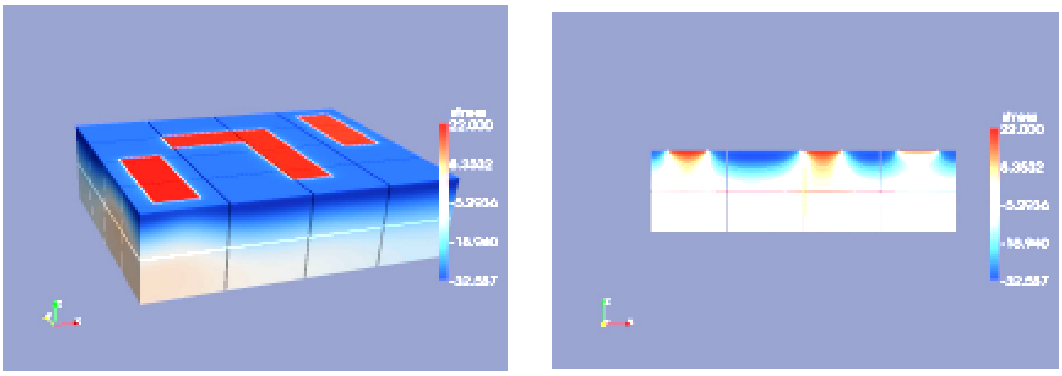


рис. 4

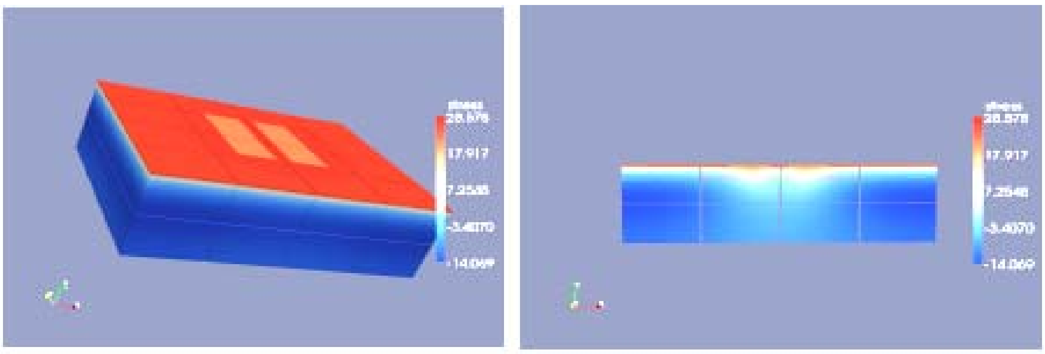


рис.5

Литература

1. Самарский А.А., Моисеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана. Журн. выч. математики и мат. физики, 1965, т. 5, № 5, с 816-827
2. *А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич.* Вычислительная теплопередача. –М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
3. *В.И.Васильев, А.М.Максимов, Е.Е.Петров, Г.Г.Цыпкин.* Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. –М.: Наука. Физматлит, 1996. – 224 с.
4. *А.А.Самарский.* Теория разностных схем. –М.: Наука, 1983. – 616 с.
5. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. *"Параллельные вычисления". -СПб.: БХВ-Петербург, 2002.-608 с.*
6. *www.paraview.org*
7. *www.open-mpi.org*

Гистерезис формы капли магнитной жидкости на проводнике с током[29]

Виноградова Александра Сергеевна[30]
Студентка
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Институт механики, Москва, Россия
vinogradova-as@mail.ru

Особенность изменения формы свободной поверхности магнитной жидкости при постепенном изменении магнитного поля заключается в том, что при некоторых значениях магнитного поля или токах в проводниках форма поверхности меняется скачкообразно, и наблюдаются различные гистерезисные явления. Такие явления в поле проводника с током были изучены во многих работах (Кирюшин, 1988 – Bacri, 1988). Формы поверхности магнитной жидкости в поле горизонтального проводника с током рассматривались в работе Кирюшина, 1988. В работах (Kiryushin, 2005 и Naletova, 2008) было исследовано поведение магнитной жидкости, перекрывающей зазор между двумя соосными цилиндрами, на оси которых находится линейный проводник с током, и показано, что при некотором токе образуется капля на проводнике. В (Налетова, 2008) было изучено влияние угла смачивания на значение этого тока. В (Bacri, 1988) теоретически и экспериментально исследована форма капли на проводнике с током в условии гидроневесомости, при теоретическом исследовании предполагалось, что магнитная проницаемость постоянна, а жидкость смачивает поверхность проводника. В данной работе изучается поведение капли магнитной жидкости на линейном проводнике с током в случае произвольного угла смачивания магнитной жидкостью поверхности проводника и зависимости магнитной проницаемости от магнитного поля. Показано, что для объёма капли на проводнике, большего некоторого критического объёма, существует гистерезис формы капли. Этот гистерезис формы заключается в следующем: при постепенном увеличении тока в проводнике диаметр капли постепенно уменьшается, и при достижении током некоторого критического значения диаметр капли уменьшается скачком, далее уменьшение радиуса с увеличением тока происходит постепенно. При последующем медленном уменьшении тока радиус сначала увеличивается постепенно, а при некотором уже другом значении тока радиус увеличивается скачком и затем меняется непрерывным образом. Обнаружено влияние угла смачивания на значения критических параметров (токов и объемов магнитной жидкости).

Литература

1. Кирюшин В.В., Назаренко А.В. (1988) Взаимодействие магнитной жидкости с проводником с током и постоянным магнитом // Известия РАН. Механика жидкости и газа, №2, с. 176–181.
2. Kiryushin V.V., Naletova V.A., Bashtovoy V.G., Reks A.G. (2005) Ambiguity of the shape of a magnetic fluid drop in a magnetic field of a line conductor // Magnetohydrodynamics, vol. 41(4), p. 3–8.
3. Naletova V.A., Kiryushin V.V., Reks A.G., Suvchuk E. (2008) Hysteresis of a shape of a magnetic fluid volume near a line conductor // Magnetohydrodynamics, vol. 44(2), p. 167–174.
4. Налетова В.А., Виноградова А.С., Рекс А.Г. (2008) Особенности влияния магнитного поля линейного проводника с током на форму объема магнитной жидкости. В сб.: 13-я Международная Плесская конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям, Плес, Ивановский государственный политехнический университет, с. 405–410.
5. Bacri J.C., Frenois C., Perzynski R., Salin D. (1988) Magnetic Drop-sheath Wetting Transition of a Ferrofluid on a Wire // Rev. Phys. Appl., vol. 23(6), p. 1017–1022.

[29] Работа была выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-90002-Бел).
[30] Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Налетовой В.А. за помощь в подготовке тезисов.

Поведение тяжелой магнитной жидкости в магнитном поле линейного горизонтального проводника с током[31]

Волкова Татьяна Игоревна[32]
Студентка
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Институт механики, Москва, Россия
TanyaVolkova@inbox.ru

Работа посвящена исследованию возможности создания магнитожидкостной перемычки между горизонтальными пластинами. В эксперименте (Налетова, Рекс, 2008) такая перемычка создана с помощью неоднородного магнитного поля с вертикальным градиентом. Получена зависимость критического расстояния между пластинами d_c, при котором происходит разрушение перемычки, от градиента поля. Зависимость является немонотонной и имеет один максимум.

В данной работе теоретически рассчитано d_c, когда поле создается проводником с током. Пусть тяжелая несжимаемая однородная магнитная жидкость объема V_0 перекрывает зазор между горизонтальными плоскостями в поле линейного горизонтального проводника с током, находящегося на верхней пластине. Все параметры зависят от координат (x,z) в плоскости, перпендикулярной проводнику. Магнитная проницаемость магнитной жидкости постоянная, поверхностное натяжение не учитывается. Задача состоит в том, чтобы найти d_c. Уравнение поверхности магнитной жидкости в безындукционном приближении в безразмерном виде имеет вид:

$$x^* = \sqrt{\frac{1}{h^* + \alpha} - h^{*2}}, \quad h^* = h/\delta, \quad x^* = x/\delta, \quad \delta^3 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)I^2}{2\pi c^2 \Delta\rho g}, \quad \alpha = -\frac{C}{\Delta\rho g\delta}.$$

Используя результаты ранних работ (Налетова, Кирюшин, 2008) и (Волкова, 2008), можно показать, что разрыв магнитожидкостной перемычки происходит либо при $\alpha=\alpha_c=(27/4)^{1/3}$ (исходный объем V_0 распадается на две соприкасающиеся части), либо при $\alpha>\alpha_c$ (весь объем жидкости остается на верхней стенке). Для трех значений объема V_0 вычислены зависимости критического расстояния d_c от параметра δ^2/V_0, характеризующего ток в проводнике. Полученные зависимости качественно совпадают с экспериментом, и их можно использовать для расчета объема магнитной жидкости, необходимого для создания магнитожидкостной перемычки при заданном токе и расстоянии между плоскостями.

Литература

1. Налетова В.А., Рекс А.Г., Савчук Е.Л., Тайнова А.А., Цвирко М.И. (2008) Равновесие и устойчивость капли магнитной жидкости на пластине в магнитном поле // В сб.: 13-я Международная плесская конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям, Плес, Ивановский государственный политехнический университет, с. 269-274.
2. Налетова В.А., Кирюшин В.В., Якименко М.И., Волкова Т.И. (2008) Скачкообразное изменение поверхности магнитной жидкости в поле горизонтального проводника с током // В сб.: Международная конференция "Нелинейные задачи теории гидро-динамической устойчивости и турбулентность", М.: Изд-во Московского ун-та, с. 46.
3. Волкова Т.И., Налетова В.А., Турков В.А. (2008) Поведение конечного объема магнитной жидкости в сосуде прямоугольного сечения в поле горизонтального проводника с током // В сб.: XVII Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов "Математическое моделирование в естественных науках", Пермь, Пермский политехнический университет, с. 16.

[31] Работа была выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-90002-Бел).
[32] Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Налетовой В.А. за помощь в подготовке тезисов.

О решении осесимметричных задач в напряжениях

Гасратова Наталья Александровна
преподаватель
Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет Прикладной математики - процессов управления, Санкт-Петербург, Россия
gasratova_na@mail.ru

В линейной теории упругости возможны два пути решения задач: в перемещениях и в напряжениях без предварительного определения перемещений.

Второй путь решения удобен лишь тогда, когда граничные условия сформулированы в напряжениях. Если речь идет о кинематических краевых условиях, то краевые величины удается представить в напряжениях для плоской и осесимметричной задач. Поэтому при исследовании осесимметричного напряженно-деформированного состояния тела, граница которого близка к сферической, оказалось возможным избрать путь решения в напряжениях.

Суть метода заключается в следующем.

Основными, в отличие от общего трехмерного случая, являются два уравнения сплошности и два уравнения равновесия, записанные в напряжениях. Краевые величины также записываются в напряжениях. Решение ищется в виде степенных рядов по косинусу угла между осью вращения и радиальной составляющей сферической системы координат. Коэффициенты этих рядов, зависящие от радиальной координаты сферической системы координат, вычисляются при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Эйлера. Преимущество представленного здесь подхода заключается в том, что неизвестные этой системы совпадают с кинематическими и статическими краевыми величинами, а это в свою очередь упрощает удовлетворение краевых условий задачи.

Данный метод проиллюстрирован на решении задач для упругого пространства со сферической полостью при одноосном растяжении и на решении аналогичной задачи, но с шаровидным жестким включением.

Литература

1.Гасратова Н. А., Шамина В. А. Об одном подходе к решению осесимметричных задач линейной теории упругости. // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2007, вып. 2. С. 101-107.

2.Гасратова Н. А., Шамина В. А. Решение в напряжениях линейной осесимметричной задачи для сферы и упругого пространства со сферической полостью. // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2008, вып. 2 С. 122-128.

3.Шамина В.А. Постановка линейной осесимметричной задачи механики деформируемого тела в напряжениях. //Вестник СПбГУ. Сер.1, 2000, вып.1 (№1).С.145-148.

4.Гасратова Н. А. Напряженно-деформируемое состояние упругого пространства со сферическим жестким включением. //Вестник СПбГУ. Сер.10, 2009 (в печати).

Построение решения типа уединенной бегущей волны в некоторых цепочках Ферми-Паста-Улама

Горчаков Алексей Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет, Москва, Россия
alex.gorchakov@mail.ru

Цепочка Ферми-Паста-Улама это классическая механическая система, состоящая из счетного числа частиц на прямой, обладающих, быть может, различными массами. Дополнительно предполагается, что каждая частица взаимодействует лишь с правым и левым соседом по цепочке, при этом потенциал взаимодействия зависит лишь от взаимного расстояния между частицами и имеет сингулярную особенность в нуле. Так же мы предполагаем, что частицы естественным образом занумерованы целым числом и что координаты частиц упорядочены согласно их номеру в любой момент движения, т.е. частицы не могут проходить друг друга.

Предметом данного исследования стали цепочки, у которых соседние частицы взаимодействуют по закону абсолютно упругого соударения. Если массы всех частиц одинаковы, то данная механическая система допускает очевидное решение: в каждый момент времени каждая частица или покоится, или движется с постоянной скоростью v, либо абсолютно упруго взаимодействует с другой частицей. При этом если в данный момент нет упруго столкнувшихся частиц, то со скоростью v движется ровно одна частица. Такое решение естественно назвать решением типа уединенной бегущей волны.

Т.к. вся кинетическая энергия системы в любой момент времени, отличный от момента столкновения частиц, совпадает с кинетической энергией отдельной движущийся частицы, решение типа уединенной бегущей волны естественно назвать процессом передачи кинетической энергии вдоль цепочки. Был исследован вопрос о возможности реализации процесса передачи кинетической энергии вдоль цепочки в случае, когда массы частиц в цепочке чередуются и равны соответственно M и m.

Оказалось, что в такой цепочке можно подобрать массы M и m и начальные расстояния между частицами таким образом, что система будет допускать существование решения, обладающего следующими свойствами:

1. В каждый момент времени движется либо одна, либо две, либо три частицы. Причем если движется более одной частицы, то их номера отличаются не больше чем на 2.
2. Пусть в данный момент времени движется лишь одна частица и ее масса равна M $(M>m>0)$, а номер равен k. Тогда через конечное число соударений между частицами с номерами $k,k+1$ и $k+2$ система перейдет в состояние, когда движется лишь частица с массой M и номером $k+2$, т.е. произойдет процесс передачи энергии вдоль цепочки.

Теорема. Вышеописанное решение существует в цепочке Ферми-Паста-Улама из частиц с чередующимися массами M и m, $M>m>0$, если и только если начальное положение частицы с номером k относительно некоторой системы координат на прямой равно $C_{11}+C_{12}k, C_{11}=const, C_{12}=const>0$ и выполняется следующее соотношение:

$$\exists I \in N : \frac{M}{M+m} = \cos\frac{\pi}{2I+1},$$

где физический смысл натурального числа I таков: передача энергии от одной частицы с массой M к следующей за ней по цепочке частице с массой M произойдет в результате ровно $2I$ соударений.

Литература

1. Treschev D. (2004) Travelling waves in FPU lattices.// J. of Disc. Cont. Dyn. Sys. (DCDS-A) №11:4, p. 867-880.
2. Козлов В.В., Трещев Д.В. (1991) Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ.

Интерпретация наблюдений метеорных и болидных явлений

Грицевич Мария Игоревна

младший научный сотрудник, асп. механико-математического факультета
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
НИИ Механики, Москва, Россия
gritsevich@list.ru

Представлен оригинальный подход к обработке данных о движении метеоров и болидов, состоящий в более аккуратном анализе их наблюдаемого торможения. По данным наблюдений светящегося участка траектории вычислены значения параметра уноса массы и баллистического коэффициента для ряда ярких метеоров, зарегистрированных камерами Канадской болидной сети, а также Прерийной сети, США в период с 1963 по 1985 год. Приведены детальные графические примеры аппроксимации наблюдательных траекторий с использованием вычисленных значений. Найденные параметры позволяют оценить массу метеорного тела в различных точках траектории. Показано, что найденная таким способом начальная масса, при тех же значениях всех прочих параметров, не соответствует фотометрическим оценкам, полученным ранее наблюдателями по интенсивности свечения тел в атмосфере. Обнаружено, что траектории крупных болидов лежат в условиях, соответствующих обтеканию тела в режиме сплошной среды. В этих условиях применение фотометрической формулы нельзя считать обоснованным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 07-01-00009-а, № 07-08-00247-а.

Численный расчет движения тела из намагничивающегося полимера с учетом зависимости намагниченности от величины магнитного поля[33]

Калмыков Сергей Александрович[34]
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Институт механики, Москва, Россия
kalmykov.sergei@gmail.com

Создание направленного движения с помощью деформации тел из намагничивающихся материалов (магнитная жидкость в упругой оболочке или намагничивающийся упругий композит) в переменном магнитном поле является перспективной задачей механики сплошных сред. Движение намагничивающейся среды может быть вызвано переменным неоднородным магнитным полем, создаваемым внешними источниками (электромагнитная система или движение постоянных магнитов). В работе (Saga, 2002) экспериментально изучено движение в канале цепи упругих сферических капсул, заполненных магнитной жидкостью. В этом эксперименте цепь капсул движутся со скоростью меньшей 2 см/с. В работах (Zimmermann, 2005, Zimmermann, 2007) впервые описана экспериментальная установка, в которой цилиндрическое тело из намагничивающегося упругого композита движется в канале под действием "бегущего" магнитного поля, создающего изгибные деформации тела. В (Zimmermann, 2007) проведено экспериментальное исследование такого движителя в широком диапазоне частот изменения магнитного поля (до 1000 Гц), также изучалось движение образцов с разными упругими свойствами и геометрическими размерами. В этом эксперименте скорость тела достигала 20 см/с. В (Zimmermann, 2008) произведен расчет статических изгибных деформаций вытянутого намагничивающегося упругого тела в переменном магнитном поле для малых частот изменения магнитного поля (до 100 Гц) в случае, когда магнитные поля малы.

В данной работе численно исследована динамика движения такого тела при произвольных частотах переключения магнитного поля (до 1000 Гц) и произвольных значениях магнитного поля. Задача решена на основе модели тонкого растяжимого стержня под действием магнитной силы с учетом зависимости намагниченности от величины магнитного поля. Вычислена зависимость скорости тела от частоты изменения магнитного поля при различных параметрах задачи. Изучено влияние на эту зависимость величины модуля Юнга и других параметров. Теоретические результаты сравниваются с экспериментальными данными.

[33] Работа была выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-91955-ННИО) и программы Ведущие научные школы РФ (проект НШ-4474.2006.1).
[34] Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Налетовой В.А. за помощь в подготовке тезисов.

Литература

1. Saga N., Nakamura T. (2002) Elucidation of propulsive force of microrobot using magnetic fluid //J. Appl. Phys., vol. 91(10), p. 7003–7005.
2. Zimmermann K., Zeidis I., Naletova V.A., Stepanov G.V., Turkov V.A., Lukashevich M.V. (2005) Undulation of a magnetizable elastic body in a magnetic field // Proc. Moscow International Symposium on Magnetism, June 25-30, 2005, p. 86–89.
3. Zimmermann K., Naletova V.A., Zeidis I., Turkov V.A., Lukashevich M.V., Kolev E., Stepanov G.V. (2007) Deformable Magnetizable Worm in a Magnetic Field – a Prototype of Mobile Crawling Robots // J. Magn. Magn. Mater., vol. 311(1), p. 450–453.
4. Zimmermann K., Naletova V.A., Zeidis I., Turkov V.A., Kolev E., Kalmykov S.A. (2008) Calculation of a magnetizable worm deformation in a magnetic field // Magnetohydrodynamics, vol. 44 (2), p. 143–148.

Влияние эффектов гелиосферного интерфейса на распределение нейтральных атомов водорода внутри гелиосферы

Катушкина Ольга Александровна

студентка

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

okat@iki.rssi.ru

Солнечная система находится в частично-ионизованном локальном межзвездном облаке (ЛМО), которое движется относительно Солнца со скоростью V_{LIC}≈26,4 км/с . При этом плазменная компонента ЛМО (протоны и электроны) взаимодействует с плазмой солнечного ветра. Таким образом, с газодинамической точки зрения происходит взаимодействие сверхзвукового потока солнечного ветра с набегающим параллельным сверхзвуковым потоком локальной межзвездной среды (ЛМС). Образующаяся при этом структура носит название гелиосферного интерфейса. Нейтральные атомы водорода, содержащиеся в ЛМС, имеют большие длины свободного пробега, сравнимые с характерным размером задачи, поэтому они свободно проникают через область гелиосферного интерфейса. Наиболее эффективным процессом взаимодействия первичных межзвездных атомов с плазменной компонентой ЛМС и солнечного ветра является процесс перезарядки ($H+H^+=H^++H$), при этом образуется новый атом водорода, который имеет свойства протона – партнера по перезарядке. Принято различать 4 сорта атомов водорода в зависимости от свойств плазмы в области их рождения. Атомы всех сортов проникают глубоко в гелиосферу (т.е. область занятую солнечным ветром) и могут быть измерены, например, на орбите Земли. При этом они могут дать существенную информацию о структуре гелиосферного интерфейса, а также о свойствах ЛМО. Поэтому построение и использование адекватной теоретической модели для описания атомов водорода является необходимым условием для корректной интерпретации экспериментальных данных, что в свою очередь имеет большое значение для понимания физических процессов, происходящих в гелиосфере.

На протяжении многих лет для описания атомов водорода использовалась “классическая горячая модель”, которая предполагает решение кинетического уравнения Больцмана для функции распределения атомов. Однако, эта модель имеет ряд недостатков: рассматривается стационарная задача, не учитывается гелиоширотная анизотропия параметров солнечного ветра, не учитывается существование области гелиосферного интерфейса. В то же время известно, что параметры солнечного ветра, а значит и характеристики движения атомов, меняются в течение 11-летнего цикла солнечной активности. А также процесс перезарядки приводит к существенному изменению параметров атомов, в результате чего на гелиосферной ударной волне (границе области сверхзвукового солнечного ветра) функция распределения атомов всех сортов значительно отличается от максвелловской. Мы в данной работе отказались от всех перечисленных выше ограничений. Разработана усовершенствованная трехмерная, нестационарная горячая модель для описания первичных и вторичных атомов водорода, включающая эффекты, связанные с существованием области гелиосферного интерфейса. При этом при построении граничного условия для функции распределения атомов на гелиосферной ударной волне использовались результаты глобальной модели гелиосферного интерфейса, предложенной В.Б.Барановым и Ю.Г.Маламой в 1993 г. Проводились сравнения наших результатов с результатами модели Баранова-Маламы, при этом наблюдается очень хорошее совпадение. В то время как классическая горячая модель приводит к существенным ошибкам. Показано, что немаксвелловский характер функции распределения на гелиосферной ударной волне приводит к очень значительным изменениям параметров атомов в окрестности Солнца. Разработанная модель будет использоваться при интерпретации данных по рассеянному Ly-альфа излучению в рамках проекта ISSI FONDUE (Fully ON-line Datacenter for Ultraviolet Emissions).

Развитие малых возмущений при разгоне тонкой оболочки газовым поршнем в мишенях тяжелоионного термоядерного синтеза

Ктиторов Лев Владимирович

Аспирант Механико-математического факультета,

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

ktitorov.lv@mail.ru

Рассмотрены малые возмущения, возникающие при разгоне оболочек в мишенях инерциального термоядерного синтеза. Предложено расширение развитых ранее аналитических подходов к расчету линейной стадии развития неустойчивости Рэлея-Тэйлора, включающее решение задачи расчета развития малых возмущений в системе поршень – оболочка, состоящей из произвольных материалов.

Проведен анализ применимости известных решений /1/, описывающих развитие возмущений в несжимаемой жидкости, для описания возмущений в реальных мишенях /2,3/. Получены дисперсионное соотношение для возмущений системы: поршень – оболочка, состоящей из несжимаемой жидкости, и два неравенства, обеспечивающих справедливость этого дисперсионного соотношения для аналогичной системы из идеального газа.

Аналитически рассмотрены малые (линейные) возмущения тонкой плоской оболочки, разгоняемой газовым поршнем в предположении, что длины волн возмущений много больше толщины оболочки и много меньше размеров неоднородностей в газе. Показано, что развитие возмущений в этом приближении не зависит от уравнений состояния веществ, входящих в состав поршня и оболочки.

Проведены численные расчеты развития малых возмущений поверхности оболочки, разгоняемой газовым поршнем в реальной слоистой мишени, разработанной в ИТЭФ имени Алиханова и ИПМ имени Келдыша для тяжелоионного термоядерного синтеза /3/. Расчеты выполнены с использованием двумерной программы НЗТ /4/, разработанной ранее в ИПМ. Определены инкременты роста возмущений.

Проведено сравнение аналитических и численных результатов. Показано их разумное согласие.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Курс теоретической физики. Том 6 “Гидродинамика”. М., Наука, 1986.
2. Nuckolls et al. Laser Compression of Matter to Super-High Densities: Thermonuclear (CTR) Applications, Nature Vol. 239, p. 129, 1972.

3. Баско М.М., Гуськов С.Ю., Недосеев С.Л., Чуразов М.Д., Мишени ИТС. В сб. "Ядерный синтез с инерционным удержанием" под ред. Б.Ю. Шаркова, стр. 53-56, раздел 3.3. М., Физматлит, 2005.
4. Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении в областях сложной формы с подвижными границами, ИПМ им. Келдыша РАН, 2004.

Групповой анализ уравнений упругости с компьютерной алгеброй

***Ли Хоуго*[а, б], *Победря Борис Ефимович*[б], *Хуа Кэфу*[а]**

Аспирант; профессор; доцент.

[а]*Пекинский университет, Факультет механики и авиационной техники, Пекин, КНР*

[б]*МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия*

aodingfulie@gmail.com

Классический групповой анализ дифференциальных уравнений возник в работе норвежского математика Софуса Ли. Эта теория описывает свойства дифференциальных уравнений при помощи непрерывных групп. Позже, Академик РАН Лев Васильевич Овсянников показав, что групповой анализ обнаруживает свою силу не только в вопросах о разрешимости, но и при отыскании широких классов точных решений и качественном исследовании дифференциальных уравнений механики и математической физики. Б.Д.Аннин, В.О.Бытев, С.И.Сенашов исследовали методами Ли—Овсянникова групповые свойства и построили точные решения уравнений упругости и пластичности в 80-х годах прошлого столетия.

Мы зачастую сталкиваемся с трудностями, связанными с мелочными и сложными вычислениями, когда пользуемся групповым анализом. Вычислительная техника для группового анализа оказывается очень важной. Какие-то новые мощные пакеты софтвера группового анализа с компьютерной алгеброй нужно быстрее разработать.

Внизу, мы объясняли алгоритм вычисления уравнения Ли классического группового анализа. Вход: алгебраическое дифференциальное уравнение $F(x,u)=0$. Выход: решения уравнения Ли $X^{(n)}F\big|_{F=0}=0$.

Шаг 1: определить дифференцирование D_i, вычислить дополнительные координаты $\eta_i^1\cdots\eta_{i_1\cdots i_n}^n$;

Шаг 2: вычислить n-продолжение $X^{(n)}$ инфинитезимального оператора X;

Шаг 3: проверить подстановкой $F(x,u)=0$ в $X^{(n)}F\big|_{F=0}=0$;

Шаг 4: найти все независимые переменные уравнения Ли, пусть их коэффициенты равно нулю, решить новую систему уравнения.

Так мы получили непрерывные группы, допускаемые дифференциальными уравнениями.

Классический групповой анализ только учитывает инвариантность уравнений. Учитывают симметричность уравнений и условия постоянных кривых поверхностей кроме инвариантности уравнений, чтобы получили более многочисленные непрерывные группы, допускаемые дифференциальными уравнениями. Этом методом называется современный групповой анализ.

Внизу, мы объясняли алгоритм вычисления уравнения Ли современного группового анализа. Вход: система дифференциальных уравнений $P(x,u,\cdots,u_i,\cdots)=0$ и k условий постоянных кривых поверхностей. Выход: уравнение Ли $X^{(n)}F\big|_{F=0}=0$, соответствующее k-постоянных кривых поверхностей.

Шаг 1: установить k условий постоянной кривой поверхности ψ;

Шаг 2: проверить подстановкой ψ в $P\left(x,u,\cdots,u_i,\cdots\right)=0$, получить переходную систему дифференциальных уравнений $\tilde{P}\left(x,u,\cdots,u_i,\cdots\right)=0$;

Шаг 3:решить каждое уравнение системы $\tilde{P}\left(x,u,\cdots,u_i,\cdots\right)=0$ с классическим групповым анализом при условии постоянных кривых поверхностей, соответствующем этому уравнению;

Шаг 4:получить уравнение Ли $X^{(n)}F\Big|_{F=0}=0$.

Софтверы помогают быстрее и точнее найти непрерывные группы, допускаемые дифференциальными уравнениями. Мы часто видим новые, интересные результаты, а также, которые, как основные математические модели, описывают реальные бытовые явление. Это очень важно для понимания сущность и законы природы.

Литература

1. Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И. (1985)Групповые свойства уравнений упругости и пластичности.М.:Наука,1985.143с.
2. Тянь Чоу (2001) Группа Ли и её применение к дифференциальным уравнениям. Пекин: Наука, 2001. (на китайском языке)
3. Ибрагимов Н.Х. (1983) Группы преобразований в математической физике. М.:Наука, 1983.
4. Olver, Peter J. (1999) Applications of Lie groups to differential equations. New York : Springer-Verlag,1999.
5. Doran R.S., Ismail M., Lam T.-Y., Lutwak E., Spigler R. (2000) Lie's structural approach to PDE systems. New York : Cambridge University Press, 2000.
6. George W. B., Gregory J. R. (1988) New symmetries for ordinary differential equations// IMA Journal of Applied mathematics. №40, p87–94.
7. Fritz Schwarz (1988) Symmetries of Differential Equations: From Sophus Lie to Computer Algebra // SIAM Review, №30(3), p450-481.
8. Cheb-Terrab E.S., Duarte L.G.S., da Mota L.A.C.P. (1998) Computer Algebra Solving of second Order ODEs Using Symmetry Methods // Preprin.

Локальная устойчивость ортотропных оболочек на упругом основании с учетом предварительных напряжений основания

Михеев Артем Валерьевич

ассистент, канд. физ.-мат. наук

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет,

Санкт-Петербург, Россия

pop1011@yandex.ru

При решении задачи устойчивости ортотропных оболочек на упругом основании под действием безмоментных начальных усилий рассматривается модель, учитывающая предварительные напряжения в основании. Получена зависимость параметра критической нагрузки от относительной жесткости основания. В качестве инструмента исследований используется метод малых вариаций исследуемого напряженно - деформированного состояния в линейной постановке, а также метод локального подхода ([1], [2], [3]). Основание локально моделируется упругим предварительно напряженным полупространством.

Литература

1. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании// Известия РАН, 2005, вып.1
2. Михеев А.В. Исследование локальной устойчивости пологих ортотропных оболочек на упругом основании// Вестник Санкт-Петербургского ун-та, сер. матем., механ., астрон. 2007, вып. 2.
3. Михеев А.В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих ортотропных оболочек на упругом основании// Вестник Санкт-Петербургского ун-та, сер. матем., механ., астрон. 2007, вып. 3.

Анализ сходимости алгоритмов типа Узавы для расчета течений вязкопластической среды в каналах

Муравлёва Екатерина Анатольевна

Аспирант

Институт вычислительной математики РАН,

Москва, Россия

catmurav@gmail.ru

В природе и технике существует широкий круг материалов, которые обладают поведением среды Бингама, а именно: ниже определенного предельного значения напряжений среда ведет себя как жесткое тело, выше этого предела - как несжимаемая вязкая жидкость. В задачах о течении вязкопластической среды характерной особенностью является необходимость строить решения в областях с неизвестной границей.

Для преодоления возникающих сложностей при построении эффективных численных методов исследования данных задач одним из наиболее удачных является метод, основанный на применении теории вариационных неравенств. В монографии Гловинского, Фортена (1982) предложены итерационные методы, являющиеся одним из вариантов метода расщепления по физическим переменным. В работах автора предложены разностные схемы для расчета течений вязкопластической среды в каналах. Доказана сходимость используемых алгоритмов (на дискретном уровне). Численные расчеты подтверждают полученные теоретические результаты.

Литература

1. Glowinski R., Fortin M. (1982) Methodes de Lagrangien Augumente, applications a la resolution de problemes aux limites. Dunod.
2. Муравлёва Е.А. (2008) Разностные схемы для расчета течений вязкопластической среды в канале // Математическое моделирование. 2008, т. 20, №11.
3. Муравлёва Е.А. (2009) Задача об остановке течения вязкопластической среды в канале // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2009, №1.
4. Муравлёва Е.А., Муравлёва Л.В. (2009) Нестационарные течения вязкопластической среды в каналах // Известия. РАН. Механика твердого тела. 2009, №3.

Несимметричные формы поверхности магнитной жидкости в симметричном магнитном поле[35]

Пелевина Дарья Андреевна[36]
Аспирантка
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Институт механики, Москва, Россия
pelevina.daria@gmail.com

При циклическом увеличении и уменьшении магнитных полей наблюдаются гистерезис формы свободной поверхности магнитной жидкости, сопровождаемый скачкообразными изменениями этой формы. В (Кирюшин, 1980) найдена форма свободной поверхности магнитной жидкости в поле проводников с током и в поле постоянного магнита. Обнаружены скачкообразные изменения формы поверхности. В (Bacri, 1988) теоретически и экспериментально исследовано скачкообразное изменение формы поверхности капли магнитной жидкости на проводнике с током. В (Bacri, 1982) теоретически и экспериментально изучен гистерезис формы капли магнитной жидкости при увеличении и уменьшении внешнего магнитного поля.

В данной работе численно решены задачи определения статической формы поверхности магнитной жидкости, содержащей концентраторы магнитного поля. Рассмотрен случай цилиндрического концентратора (плоская задача) в однородном вертикальном приложенном магнитном поле в безиндукционном приближении. Учтены сила тяжести, поверхностное натяжение и зависимость намагниченности магнитной жидкости от магнитного поля.

Показано, что при увеличении приложенного магнитного поля форма свободной поверхности магнитной жидкости, в начальный момент покрывающей тело, деформируется и при некотором значении поля скачкообразно распадается. При этом форма свободной поверхности после распада может быть как симметричной, так и несимметричной. Также получено что, начиная с некоторых значений внешнего магнитного поля, одновременно существует множество решений, описывающих односвязные и не односвязные объемы жидкости. Возможность реализации в эксперименте того или иного стационарного решения связана с начальными условиями и способом изменения внешнего магнитного поля. Численно определены критические значения магнитных полей, которые являются границами существования различных конфигураций решений.

Показано, что в некотором диапазоне полей возможны скачкообразные изменения формы поверхности и гистерезис формы поверхности при постепенном циклическом увеличении и уменьшении приложенного поля. Форма поверхности магнитной жидкости при возрастающем поле может не совпадать с формой поверхности при убывающем поле.

Литература

1. Bacri J.-C., Frenois C., Perzynski R., Salin D. (1988) Magnetic drop-sheath wetting transition of a ferrofluid on a wire // Revue de physique appliqué, vol. 23(6), p. 1017−1022.
2. Bacri J.-C., Salin D. (1982) Instability of ferrofluid magnetic drops under magnetic field // Journal de physique – letters, vol. 43(17), p 649−654.
3. Кирюшин В.В, Чыонг За Бинь (1980) Фигуры равновесия намагичивающейся жидкости в магнитном поле // Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, №4, с. 123−128.
4. Zimmermann K., Naletova V.A., Zeidis I., Turkov V.A., Pelevina D.A., Böhm V., Popp J. (2008) Surface of a magnetic fluid containing magnetizable bodies in an applied uniform magnetic field // Magnetohydrodynamics, vol. 44(2), p. 175−182.

[35] Работа была выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-91955-ННИО) и программы Ведущие научные школы РФ (проект НШ-4474.2006.1).
[36] Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Налетовой В.А. за помощь в подготовке тезисов.

Выделение и классификация сингулярностей газодинамических полей с помощью вейвлет анализа[37]

Плёнкин Андрей Валерьевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
golden_dragon_84@mail.ru

Известно, что использование алгоритмов сквозного счета при численном моделировании газодинамических задач приводит к размазыванию и зашумлению разрывов. Однако для широкого круга задач (адаптивное построение расчетных сеток) необходима информация о расположении сингулярностей. Таким образом, задача автоматического выделения и классификации особенностей расчета становится особенно важной.

В ходе исследования этой задачи был построен детектор сингулярностей на основе вейвлет анализа. В качестве исходных данных детектор использует результаты расчета газодинамических полей полученных на некоторой сетке. В результате алгоритм присваивает каждому узлу сетки число, которое характеризует тип течения в окрестности этого узла. Особенностью алгоритма является то, что он не требует обязательного задания порогов чувствительности, хотя такая возможность имеется. Это расширяет область использования детектора для автоматического выделения разрывов, но приводит к появлению артефактов, которые могли бы быть исключены при дополнительной, тонкой настройке.

Поскольку в расчете могут присутствовать эффекты соответствующие разным масштабам, возникает не менее важная задача отделения несущественных структур, соответствующих шумовым эффектам, от разрывов газодинамических параметров. Это привело к необходимости проведения дополнительной обработки исходного поля средствами кратномасштабного вейвлет анализа.

Детектор использовался для тщательного изучения структуры особенностей течения в задаче об эволюции и взаимодействии разрывов в канале под действием импульсного вложения энергии.

Литература

1. Афендиков А.Л., Левкович-Маслюк Л.И. (2003) Локализация особенностей газодинамических полей при помощи комплексных ортогональных вейвлет - разложений. // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №101
2. Афендиков А.Л., Горбунова В.В., Левкович-Маслюк Л.И., Плёнкин А.В. (2005) Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи комплексных и вещественных вейвлетов. // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №98.
3. Афендиков А.Л., Левкович-Маслюк Л.И., Луцкий А.Е., Плёнкин А.В. (2008) Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа. // Математическое Моделирование, том 20, №7, страницы 65-84.
4. Афендиков А.Л., Луцкий А.Е., Плёнкин А.В. (2008) Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей. // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №98.

[37] Тезисы доклады основаны на материалах исследований, проведенных в рамках грантов РФФИ (грантов №08-01-00454-а и №08-08-00356).

Газодинамическое моделирование взаимодействия холодного нейтрального облака с окружающей его горячей плазмой

Проворникова Елена Александровна
студентка
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет, г. Москва, Россия
provea@iki.rssi.ru

В работе представлена газодинамическая двухкомпонентная модель взаимодействия холодного нейтрального облака с окружающей его горячей плазмой. Считается, что облако заполнено газом атомарного водорода с концентрацией $n_H \sim 1\,\tilde{n}\grave{i}^{-3}$ и температурой $T \sim 10^4\,K$, плазма – квазинейтральна, состоит из протонов и электронов с концентрацией $n_p \approx n_e \sim 10^{-3}\,\tilde{n}\grave{i}^{-3}$ и температурой $T \sim 10^7\,K$. Нейтральная и плазменная компоненты взаимодействуют между собой посредством резонансной перезарядки атомов водорода на протонах плазмы. Также исследуется влияние электронной теплопроводности в плазменной компоненте на возникающую структуру течения. Показаны результаты одномерной нестационарной модели взаимодействия нейтрального облака и плазмы в плоском и сферически-симметричном случае. Определена структура сформировавшейся переходной области, разделяющей нейтральный газ облака и плазму, и распределение газодинамических параметров в ней.

Задача о взаимодействии холодного облака с горячей плазмой имеет широкое применение в астрофизике. В частности перезарядка тяжелых ионов, присутствующих в горячей плазме, на атомах водорода приводит к возникновению рентгеновского излучения. В работе представлена оценка величины, характеризующей интенсивность рентгеновского излучения, для всей области, занимаемой смесью заряженных и нейтральных частиц, и показано, что в сформировавшемся переходном слое эта величина достигает максимума.

Математическое моделирование процесса изготовления стеклопластиковых изделий методом вакуумной инфузии

Прохоренко Антон Юрьевич
Аспирант, toma4o@gmail.com;
Сафонов Александр Александрович
к.т.н. н.с., safonov@mail333.com
Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН,
Москва, Россия

Инфузия – это технологический процесс изготовления стеклопластиковых изделий, при котором материал формируется при пропитке армирующего наполнителя смолой за счет действия вакуумирования. Цикл изготовления изделия методом вакуумной инфузии состоит из пяти стадий: подготовка армирующего наполнителя, укладка армирующего наполнителя в жесткую форму, установка вакуумированного мешка и системы пропитки, пропитка армирующего наполнителя смолой за счет пониженного давления и полимеризация, съем готового изделия. С использованием технологии вакуумной инфузии изготавливают различные крупногабаритные композитные конструкции: корпуса яхт, лопасти ветряных установок, мостовые конструкции.

Важнейшей задачей при проектировании инфузионного процесса является разработка системы пропитки. Если изделие полностью не пропитается во время технологического процесса, то оно будет забраковано. При производстве крупногабаритных конструкций это сопряжено с большими финансовыми и временными потерями.

Целью данной работы являлось разработка математической модели процесса пропитки, которая позволит производить виртуальные технологические эксперименты.

Течение смолы через армирующий наполнитель моделируется законом Дарси, который устанавливает линейное отношение между скоростью потока и градиентом прикладываемого давления. С учетом гравитационных сил, которые необходимо учитывать при моделировании вакуумной инфузии крупногабаритных изделий, закон Дарси и уравнение равновесия в трех мерной постановки записывается следующим образом:

$$\underline{u} = -\frac{\underline{K}}{\eta}\left(\underline{\nabla} p - \rho_r g\right),$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0,$$

где $\underline{u}$ - скорость потока, $\underline{K}$ - тензор проводимости, η - вязкость смолы, p - давление в смоле, ρ_r - плотность смолы, g - ускорение свободного падения, $\underline{\nabla}$ - градиент.

При решении задачи с использованием МКЭ область разбивается на конечные элементы. Для решения задачи о распространении фронта течения вокруг узлов конечно элементной сетки строятся контрольные объемы. Во время вычисления неустановившийся процесс течения связующего при вакуумной инфузии представляется в виде серии стационарных задач. На каждом временном шаге решается задача о распределении давления с использованием МКЭ.

В работе приведены примеры моделирования и оптимизации технологического процесса инфузии следующих крупногабаритных конструкций из стеклопластика: волноотбойная стенка, арочный мост, панель мозаичного панно.

Литература

1. Koefoed M. S. Modeling and Simulation of the VARTM Process for Wind Turbine Blades. Industrial Ph.D. Dissertation. 2003.
2. Weitzenbock J.R., Shenoi R.A., Wilson P.A. Radial flow permeability measurement. Part a: Theory. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 30(6), 781–796. 1999.
3. Weitzenbock J.R. Flow Characterization in Resin Transfer Molding. PhD thesis. Southampton University. 1996.

Теория температурного автоскрепления в многослойных оболочках из полимерных материалов, работающих при внутреннем давлении и градиенте температуры

Родивилов Сергей Николаевич

аспирант

Московский Государственный Университет Инженерной Экологии, Москва, Россия

maquisoxsi@mail.ru

Сформулирована аналитическая теория и даны уравнения для 2х-слойной оболочки. В докладе дано аналитическое решение задачи расчета 3х- и 4х-слойных оболочек.

Рассмотрено напряженно-деформированное состояние многослойной цилиндрической оболочки большой толщины атомного реактора. Математическая модель в тензорной форме применяется для вычисления приведенного модуля упругости наружного слоя с ортотропными свойствами [1] (рассмотрена 3х-слойная конструкция; для двух наружных слоев находится приведенный модуль упругости). Новизна работы состоит в анализе эффекта температурного автоскрепления в трехслойных оболочках при действии внутреннего давления (до 12 МПа) и градиента температуры по толщине оболочки контейнера (до ~ 100ºС) [2].

Показана возможность увеличения прочности трех и четырехслойных оболочек большой толщины (полимербетон, стеклопластик, наружный защитный слой металла) при одинаковом внутреннем давлении и повышении температуры, обусловленного преобразованием в диэлектрической матрице энергии γ-облучения (1,0 – 1,2 МэВ) в электрическую энергию и тепло с мощностью объемного тепловыделения до ~ 1000 Вт/м^3.

При увеличении «жесткости» на растяжение наружного («сдерживающего» расширяющийся при нагреве внутренний слой полимербетона) слоя на внутренней поверхности внутреннего слоя можно добиться не только уменьшения опасных растягивающих напряжений, но и создать условия, когда эти напряжения будут сжимающими, предупреждая развитие трещин и увеличивая долговременную прочность контейнера РАО.

Тензоры упругости зависят от многих факторов, в том числе от свойств материалов, от внутреннего строения оболочки и от геометрии несущей поверхности.

Полученный по теории П.А. Жилина эффективный модуль упругости Е = 6,467·10^4 МПа (соотношение толщин стеклопластик : металл составляет 5 : 1) в сравнении с модулем упругости по теории смесей $E = E_{pg} \cdot (1-\varphi_{Me}) + E_{Me} \cdot \varphi_{Me}$, где E_{pg}, E_{Me} - модули упругости стеклопластика и металла (сталь 08Х10Т) соответственно, а доля металла φ_{Me} - высчитывается из того же соотношения толщин, Е = 7,08·10^4 МПа, является физически более корректным для данного случая (так как тонкий слой металла расположен на поверхности, а не в объеме, и эффективный модуль упругости должен быть меньше, нежели по теории смесей).Согласно другой гипотезе, осреднение возможно: $\xi_m^{\frac{1}{3}} = \sum_{i=1}^{2}\left[V_i \cdot (\xi_i)^{\frac{1}{3}}\right]$. Полученный результат составляет Е = 6,493·10^4 МПа (погрешность в сравнении с численным экспериментом ε = 5,9 %). Выше V_i – объемная доля соответствующего слоя.

Работа Жилина П.А. позволяет перейти от трехслойной и четырехслойной конструкции цилиндрической оболочки к двухслойной. Погрешность расчета эффективных модулей упругости в сравнении с численным экспериментом составляет до 7%. В работе также учитывается изменение энергии упругой деформации [3].

Литература

1. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. Уч. пос. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. – 166с.
2. Богомольный В.М. Оптимальное проектирование оболочек машин, трубопроводов, аппаратов. М.: МГУС, 2003, 226с.
3. Теория упругости. Пер. с англ. Тимошенко С.П. «Наука». 1975 г. – 576с.

Нелинейные эволюционные уравнения для описания волн в жидкости с пузырьками газа

***Синельщиков Дмитрий Игоревич*[38]**

Аспирант

Московский Инженерно-Физический Институт (государственный университет), факультет экспериментальной и теоретической физики, Москва, Россия

DISinelshchikov@mephi.ru

Рассматривается распространение нелинейных волн в двухфазной среде – жидкости содержащей пузырьки газа. Подобные двухфазные модели встречаются при описании множества явлений в физике, химии, биологии, однако до сих пор недостаточно изучены.

При описании двухфазной среды используется гомогенная модель. Предполагается, что между жидкой и газовой фазой происходит быстрый обмен импульсом и теплотой. Это позволяет рассматривать газожидкостную смесь как однородную среду, имеющую среднюю

[38] Автор выражает признательность профессору, д.ф. – м.н. Кудряшову Н.А. за помощь в подготовке тезисов.

температуру и давление. При этом процессы образования, разрушения, слипания пузырьков и фазовые переходы не учитываются. Также предполагается, что относительная скорость движения фаз мала, что допускает использование классических уравнений гидродинамики для описания течения смеси, записанных относительно ее усредненных характеристик.

На межфазной границе учитывается вязкое трение. Предполагается, что газ в пузырьке может нагреваться и охлаждаться, при этом температура жидкости остается постоянной в силу того, что ее масса и теплоемкость много больше массы и теплоемкости газа. Считаем что расстояние между пузырьками много больше радиуса пузырька, что позволяет при выводе уравнения состояния использовать уравнения динамики и энергии одиночного пузырька. Предполагается, что отклонения радиуса пузырька от начального значения малы.

Рассматриваются длинноволновые возмущения – характерные длины волн много больше, чем расстояние между пузырьками. С учетом указанных выше предположений получена замкнутая система уравнений относительно возмущения давления, радиуса пузырька и скорости смеси.

Для анализа системы уравнений использовались метод многих масштабов и метод возмущений. С их помощью получено семейство нелинейных эволюционных уравнений для описания волн давления в жидкости содержащей пузырьки газа. Некоторые из полученных уравнений являются новыми. При рассмотрении чисто изотермического поведения газа в пузырьке результаты переходят в уже известные. С помощью метода многих масштабов классифицировано влияние физических свойств системы жидкость – пузырьки газа на эволюцию волн давления.

Для построения точных аналитических решений полученных нелинейных уравнений использован метод простейших уравнений. Найдены значения безразмерных параметров, характеризующих физические свойства системы жидкость – пузырьки газа, при которых существуют точные решения типа бегущей волны. Получены периодические решения и решения в виде уединенных волн и волн перехода.

Литература

1. Van Winjgaarden L. (1968) On the equation of motion of liquid and gas bubbles. // J. Fluid Mech. V. 33. p. 465-464
2. Накоряков В.Е. (1990) Волновая динамика газо– и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат. -248 с.
3. Kudryashov N.A. (2005) Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. // Chaos, Solitons and Fractals. V.24 (5) p. 1217-1231

Стационарные движения двух вязкоупругих планет[39]

Шатина Любовь Сергеевна
Студентка
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
captainpegas@rambler.ru

Рассматривается задача о поступательно-вращательном движении двух вязкоупругих планет в поле сил взаимного притяжения. Планеты моделируются однородными изотропными вязкоупругими телами, которые в недеформированном состоянии занимают шаровые области в трехмерном евклидовом пространстве. Изучается частный случай, когда центры масс планет движутся в неподвижной плоскости, а ось вращения каждой из планет направлена по нормали к этой плоскости.

[39] Тезисы доклада основаны на материалах исследований, проведенных в рамках гранта РФФИ №08-02-00367

Задача решается в рамках линейной модели теории упругости. Функционал диссипативных сил соответствуют модели Кельвина-Фойгта. Уравнения движения рассматриваемой механической системы выводятся в форме уравнений Рауса. Переменные Андуайе-Делоне составляют гамильтонову часть переменных и описывают поступательно-вращательное движение планет. Обобщенные координаты, описывающие деформации планет, составляют лагранжеву часть переменных. Полученная система уравнений движения представляет собой сложную систему интегро-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

Методом разделения движений и усреднения строится приближенная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных “действие”, описывающая диссипативную эволюцию поступательно-вращательного движения двух планет с учетом возмущений, вызванных упругостью и диссипацией.

Найдены стационарные решения усредненной системы уравнений и проведено исследование их устойчивости. Показано, что в стационарном движении система двух планет равномерно вращается относительно общего центра масс как твердое тело, то есть планеты обращены друг к другу одной стороной, а центры масс планет равномерно движутся по круговым орбитам. В зависимости от величины модуля вектора $\mathbf{G}_0$ момента количеств движения системы двух планет относительно общего центра масс, эволюционная система имеет n стационарных решений, $n = 0,1,2$.

В случае $n = 1$ стационарное движение является неустойчивым, в случае $n = 2$ движение, соответствующее большему стационарному расстоянию между центрами масс планет, асимптотически устойчиво, а меньшему – неустойчиво.

Получены значения радиусов стационарных орбит для планет Солнечной системы в рамках рассматриваемой модельной задачи.

Литература

1. Вильке В.Г. (1997) Аналитическая механика с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, ч1 216 с., ч2 160 с.
2. Шатина А.В.(2001) Эволюция движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Космические исследования, т.39, №3, с. 303-315.
3. Солнечная система. (под ред. Сурдина В.Г.) (2008). М.: Физматлит.

Подходы к построению определяющих соотношений с применением конечных деформаций для описания поведения материалов с памятью формы.

Шуткин Андрей Сергеевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия

andrey.shutkin@gmail.com

Как известно, сплавы с памятью формы сильно отличаются по своим механическим свойствам от обычных металлических материалов. Деформации, которые в них достигаются, значительно превышает упругие деформации обычных сплавов и металлов. В связи с этим, появляется задача построения специфических определяющих соотношений, описывающих поведение таких сплавов. Определяющие соотношения могут быть построены, в том числе и с учетом конечных деформаций. Одной из главных задач при моделировании поведения материалов с памятью формы является идентификация выбранных определяющих соотношений.

Мной предлагаются несколько вариантов выбора тензорных мер деформаций и напряжений из класса голономных энергетически сопряженных тензорных мер, которые удобно использовать для обобщения определяющих соотношений материалов с памятью формы на случай конечных деформаций. Строится набор базовых экспериментов, который можно использовать для идентификации конкретной модели.

Литература

1. Мовчан А. А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы. // Прикладная механика и техническая физика, 1995, Т.36, №2. С.173-181.
2. Мовчан А.А., Казарина С.А. Описание конечных фазовых деформаций при термоупругих мартенситных превращения // Механика композиционных материалов и конструкций, 1998, Т4, №2, с. 26-36.
3. Мовчан А.А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Известия АН СССР, Механика твердого тела, 1998, №1, с.79-90
4. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с
5. Бровко Г.Л. Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1987, С. 68-81.

Подписано в печать

Формат 60x90 1/16. Усл. печ. л.

Тираж экз. Заказ

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании

Механико-математического факультета

МГУ имени М. В. Ломоносова