Об оптимальном значении ожидаемой полезности в модели с одним риском

Черный Владимир Александрович
студент
Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет.
E-mail: mmblack@bk.ru

Целью данной работы является исследование одной финансовой модели, часто используемой в страховании. При данной функции полезности U, относящейся к лицам, не склонным к риску, рассматривается изменение начального капитала страховой компании x на величину некоторого существенного риска ξ, взятого в объеме α. В связи с этим искомая полезность представляет собой функцию, зависящую от случая, $U(x+\alpha\xi)$. Тогда математическое среднее $E[U(x+\alpha\xi)]$ можно рассматривать как ожидаемую полезность.

Естественным для страхования является вопрос максимизации этой величины по α. Следовательно, важно найти не только сам максимум, но и значение аргумента, на котором он достигается, что в страховании обеспечит решение двух важных задач: в каком количестве брать данный риск страховщику, чтобы добиться наибольшей выгоды при наименьших затратах, и какое среднее значение полезности ожидать при этом. Поскольку рассматриваются функции полезности для лиц, несклонных к риску, то в этом случае ответ представляется в пригодном для практических целей виде.

В связи с тем, что отрицательное значение капитала на практике означает разорение, что не приемлемо для страховой фирмы, то достаточно остановиться на рассмотрении таких функций полезности, которые при отрицательном аргументе принимают значение $-\infty$, данное ограничение приведет к анализу среди меньшего множества: $\alpha \in (0, c)$, для некоторой положительной константы c.

При помощи преобразования Фенхеля приведем полезность $U(x)$ к некоторой функции $V(x)$, определяемой по формуле:

$V(x) = max[U(y) – xy]$,

где максимум берется по переменной y.

Дальнейшие преобразования над новой функцией V приведут к двойственной к начальной задаче, более удобной для рассмотрения. А именно, в совокупности случайных величин η с условием взаимосвязи с риском ξ находят ту, на которой достигается минимум (далее $v(y)$) от величины: $E[V(y\cdot\eta)]$.

Следует отметить, что если сравнивать решения двух полученных задач, то можно понять, что они связаны конкретными формулами. А именно, если рассмотреть $y = u'(x)$, то оптимальное значение коэффициента α и значение η, на котором достигается минимум во второй задаче, подчинены следующему закону:

$\eta = U'(x+\alpha\xi)$,

из которого простыми вычислениями находится α.

Что же касается оптимального значения полезности $u(x)$, то для него верно следующее: $u(x) = max[v(y) - xy]$.

Тем самым получены точные формулы, связывающие решения данных задач, причем последняя из них более удобная для расчета на практике.

В заключении хотелось бы отметить, что поставленная задача имеет прямое обобщение при рассмотрении модели со многими рисками.