О полноте исчисления Ламбека относительно моделей на конечных полугруппах с делением

Харитонов Александр Валентинович
студент
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, каф. матем. логики и теории алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: Alexander.Kharitonov@gmail.com

Рассмотрим исчисление Ламбека **L** (Ламбек, 1964). Типы **L** (будем обозначать их заглавными латинскими буквами, а их конечные последовательности – заглавными греческими) строятся из примитивных типов p_i с помощью трёх логических связок - / (правое деление), \ (левое деление) и · (умножение). В **L** выводятся секвенции вида $\Gamma \to B$, где $\Gamma = A_1,\ldots,A_n$ - конечная последовательность типов, с помощью аксиом вида $A \to A$ и следующих правил вывода: если выводится $A, \Pi \to B$, то выводится $\Pi \to A \setminus B$, если выводится $\Pi, A \to B$, то выводится $\Pi \to B / A$, если выводится $\Gamma, A, B, \Phi \to C$, то выводится $\Gamma, (A \cdot B), \Phi \to C$, если выводятся $\Gamma \to B$ и $\Pi \to C$, то выводится $\Gamma, \Pi \to B \cdot C$, если выводятся $\Phi \to A$ и $\Gamma, B, \Pi \to C$, то выводится $\Gamma, \Phi, (A\setminus B), \Pi \to C$ и, наконец, если выводятся $\Phi \to A$ и $\Gamma, B, \Pi \to C$, то выводится $\Gamma, (B/A), \Phi, \Pi \to C$.

Конечной полугруппой с делением называется структура $(A, \cdot, \setminus, /, \leq)$, где $(A, \cdot)$ – полугруппа, $\leq$-частичный порядок на множестве A, согласованный с операциями $\cdot, \setminus, /$ следующим образом: $(x \leq y)$ & $(s \leq t)$ => $x\cdot s \leq y\cdot t$, $a\cdot b \leq c \Leftrightarrow a \leq c/b$, $b\cdot a \leq c \Leftrightarrow a \leq b\setminus c$. Заметим, что если A – полугруппа, то на P(A), упорядоченном по включению, существует естественная структура полугруппы с делением.

Моделью исчисления **L** на полугруппе с делением называется пара (M,v), где M – полугруппа с делением, а v – отображение типов **L** в M, такое, что $v(A\cdot B) = v(A) \cdot_M v(B)$, $v(A\setminus B) = v(A) \setminus_M v(B)$, $v(B/A) = v(B) /_M v(A)$ для любых типов A и B. Секвенция $A_1,\ldots,A_n \to B$ называется верной в модели (M,v), если $v(A_1) \cdot_M \ldots \cdot_M v(A_n) \leq v(B)$. Нетрудно проверить, что исчисление **L** корректно относительно таких моделей. Возникает естественный вопрос о его полноте. Пентус в работе (Pentus, 1995) показывает, что **L** полно относительно моделей на классе свободных полугрупп. Мы показываем, что имеет место полнота **L** относительно класса конечных моделей на полугруппах с делением.

Чтобы доказать это, вводятся два вспомогательных исчисления **L'** и **TL**. Объектами исчисления **L'** будут конечные последовательности типов **L,** в которых один тип будет отмечен. Правила этого исчисления будут соответствовать правилам исчисления **L**, за исключением правила циклического сдвига. Получившееся исчисление будет эквивалентно **L**, но в нём все правила, кроме правила циклического сдвига, можно будет разделить на две группы – α- и β-правила. α-правила будут иметь вид «если выводится Г, α_1, α_2, то выводится Г, α», а β-правила – «если выводится Г, β_1 и β_2, П, то выводится Г, β, П» для соответствующих наборов α, β, α_i и β_j. Например, правило введения правого деления справа относится к α-правилам, и для него $\alpha_1 = A$, $\alpha_2 = B$, $\alpha = (B/A)'$. Объектами исчисления **TL** будут TL-таблицы для секвенций исчисления **L'**, которые являются конечными деревьями типов **L'**, отмеченных элементами полугруппы специального вида *L*, введённой в (Buszkowski, 1986). В этой полугруппе есть выделенный элемент *, и элементы, представимые в виде bc, где cb = *, называются тотальными. Так как в **L** выводимости секвенций $A_1,\ldots,A_n \to B$ и $A_1\cdot\ldots\cdot A_n \to B$ равносильны, то можем считать, что секвенция имеет вид $A \to B$ для некоторых типов A и B. Каждой секвенции **L'** соответствует её начальная таблица в **TL** и все таблицы, полученные из неё по α - и β-правилам преобразования **TL**-таблиц. Эти правила соответствуют разбору α- и β-типов **L'**. При этом оказывается (Terui, 1999), что если для секвенции существует замкнутая таблица, то есть таблица, на каждой ветви которой лежит два отмеченных типа вида A: a, A': b, где ab тотальна, то такая секвенция выводима в **L'**. Также для некоторой ветви θ назовём её (упорядоченное) подмножество тотальным, если произведение меток его элементов тотально.

Вообще говоря, последовательность **TL**-таблиц для секвенции, последовательно получаемых друг из друга, может быть бесконечной. Для построения конечной контрмодели мы налагаем на применение правил преобразования таблиц некоторые ограничения, которые обеспечивают завершение процесса построения таблиц для конкретной секвенции за конечное число шагов. Эти ограничения соответствуют тому, что получаемая в результате таблица будет либо замкнутой, и тогда секвенция выводима, либо будет соответствовать завершенному дереву поиска вывода секвенции **L'** снизу вверх, то есть все непримитивные типы будут разобраны всеми возможными в процессе поиска вывода способами. Такие типы мы называем учтёнными.

В случае, когда алгоритм завершается на незамкнутой таблице для секвенции $A \to B$, мы можем построить по незамкнутой ветви θ (все типы которой учтены по построению алгоритма) конечную контрмодель к исходной секвенции. Построим новую полугруппу V, элементами которой будут являться ∞ и всевозможные упорядоченные произведения меток элементов, лежащих в каком-либо тотальном множестве на θ и не являющихся помеченными в смысле **L'**. Операцию умножения определим как $a \cdot b = ab$ в смысле *L*, если произведение в смысле *L* снова лежит в V, и $a \cdot b = \infty$ иначе. Легко проверяется, что таким образом определённая операция ассоциативна. Искомая контрмодель (W,v) определяется на полугруппе с делением W = P(V) следующим образом: $v(p_i) = \{ w \mid p_i : w$ лежит на $\theta \} + \{ \infty \}$. Мы показываем, что для любого типа B из того, что B: b лежит на θ следует, что b принадлежит v(B), и для любого типа C, элемента c из *L* и элемента b из $V \setminus \{ \infty \}$ из того, что bc тотален следует, что b не принадлежит v(C).
Применяя эту лемму к корню таблицы $B': (*,0)_1$ и его потомку $A: (*,0)_2$ получаем, что $(*,0)_2$ лежит в v(A), но не в v(B), то есть в модели (W,v) секвенция $A \to B$ неверна.

Литература

1. Ламбек И. (1964). Математическое исследование структуры предложения // Математическая лингвистика. Сборник переводов / под ред. Ю.А.Шрейдера и др. М.: Мир, 1964.
2. M. Pentus (1995). Models for the Lambek calculus. // Annals of Pure and Applied Logic, 75,1—2:179-213.
3. W. Buszkowski (1986). Completeness results for Lambek syntactic calculus. // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 32:13-28
4. K. Terui. (1999). Labelled Tableau Calculi Generating Simple Models for Substructural Logics. // ILLC Research Report PP-1999-04, University of Amsterdam