

**Секция «9. Количественные методы и информационные технологии в финансах и экономике»**

**Применение теории игр с природой в психофизике и психологии**

*Иванова Евгения Анатольевна*

*Студент*

*Финансовый университет при Правительстве РФ, Факультет прикладной математики, Москва, Россия*

*E-mail: kattira@mail.ru*

*Научный руководитель*

*профессор Лабскер Лев Григорьевич*

Желание объяснить поведение человека всегда привлекало ученых и философов, что в свою очередь рождало новые теории и, больше того, новые науки. Так, черты психологической теории можно обнаружить уже в античности, однако более формальный подход к анализу мыслительного процесса человека возник относительно недавно, в середине 19 века, вместе с появлением новой науки – психофизики. Чем занимается психофизика? Простыми словами, психофизика стремится соотнести физические процессы с их субъективным восприятием. Распознавание сигнала в шуме, деление октавы на различимые человеческим ухом ноты, определение порога человеческих чувств – все это представляет область интереса специалиста психофизики. Выводы, полученные в результате решения перечисленных задач, интегрированы в окружающий человека мир, а потому работа в данной области чрезвычайно актуальна. Модели психофизики и психологии имеют целью объяснить, почему человек принимает конкретное решение. Математический аппарат, лежащий в основе подобных моделей, составляют ключевые положения теории игр – науки, призванной научить игроков принимать оптимальные решения.

Задача работы состоит в определении решающего правила теории обнаружения на основе критериев оптимальности игровой теории. Кроме того, анализируется степень применения людьми критериев теории игр на практике. В работе используется игровой аппарат, а также основные положения теории вероятностей.

**Теория игр и психофизика** Обозначим  $s$  – полезный сигнал, а  $n$  – шум. Внешняя система может иметь два состояния: 1) присутствует только шум ( $n$ ); 2) одновременно присутствуют шум и полезный сигнал ( $sn$ ). Предположим, что эти состояния равновероятны (т.е. априорные вероятности равны  $P(n) = P(sn) = 0.5$ ),  $x$  – то значение раздражителя, которое получено системой и исходя из которого система должна сделать выбор в пользу гипотезы 1 или 2, причем условные распределения  $(x|sn)$  и  $(x|n)$  соответствуют нормальным распределениям. Для шума справедливо нормальное распределение с параметрами  $N(0, 1)$ , а для сигнала в шуме –  $N(1, 2)$ . Рассмотрим эту задачу с позиции теории игр. Заметим, что рассматриваемая игра не является антагонистической, поскольку соперником человека в данном случае выступают умения человека и объективная реальность, параметры которой не заложены с целью переиграть человека. В терминологии теории игр модель сложившейся игровой ситуации называется «игрой с природой» [2]. Определим цены решений. Пусть за ложную тревогу (выбор гипотезы  $H_2 = Sn$ , в то время как сигнал отсутствовал, т.е.  $h_1 = n$ ) снимается 5 у.е.

За совершение ошибки второго рода, т.е. за не распознавание сигнала в шуме, снимается 10 у.е. За правильный ответ снимается 0 у.е. Требуется определить оптимальную стратегию, другими словами, сформулировать решающее правило. Эта ситуация задает игру с природой в условиях риска, поэтому обоснованным будет применение критерия Байеса относительно рисков. Составим игровую матрицу  $R$ , элементами которой будут риски (рис.2).

Можно показать, что использование критерия Байеса, а также несложных выкладок с использованием статистического аппарата приводит к следующему решающему правилу: если распознающая система получит сигнал из промежутка  $[-2.14318; 0.14318]$ , то она должна принять гипотезу об отсутствии сигнала  $H_1 = N$ , при попадании величины раздражителя вне этого промежутка – должна просигнализировать о присутствии полезного сигнала  $H_2 = Sn$ . Включение или не включение границ -2.14318 и 0.14318 не принципиально, т.к. вероятность попадания или промаха – 50:50, как правило, в граничных точках решение лучше не принимать [5].

Насколько в действительности люди следуют подобным правилам, демонстрируют психологические эксперименты.

**Теория игр и психология** Оказывается, человеку свойственна некоторая «нерациональность» в принятии решений [1]: избегание повторений и наличие критерия потребления. Это приводит к несоблюдению критериев оптимальности игровой теории, а следовательно, к неоптимальным с объективной точки зрения решениям. Проиллюстрируем утверждение на хорошо известном в психологии примере.

Имеются две лампочки, белая и зеленая, включаемые попеременно. Частота зажигания белой лампочки, т.е.  $P(\text{белая}) = 0.8$ , а частота зажигания зеленой – 0.2. Включения белой и зеленой лампочек независимы, и обе вероятности сообщаются испытуемому. Испытуемому предлагается угадывать, какая из лампочек зажжется в следующий раз, причем перед ним ставится задача дать как можно больше правильных ответов. Исследуем поставленную экспериментаторами задачу с точки зрения теории игр. Допустим, за правильный ответ дается 1 балл, а за неправильный 0 баллов. Игровая матрица  $A$  представлена рисунком 3.

Удивительно, но в подавляющем большинстве экспериментов испытуемые выбирают стратегию подгонки, т.е. давали ответы, соблюдая априорные вероятности, другими словами, следовали (с их точки зрения оптимальной) смешанной стратегии  $P = (0.8, 0.2)$ .

Объективно оптимальное решение найдем, применяя критерий Байеса для выигрышей, поскольку суть задачи – в максимизировании среднего выигрыша. Получим, что оптимальна стратегия  $A_1$ , которая дает правильный ответ в 80 случаев из ста. Расчет среднего выигрыша, получаемого на практике при использовании  $P = (0.8, 0.2)$ , дает выигрыш в среднем лишь в 68 случаев из ста.

Выбор стратегии «все или ничего»  $A_1$  оптимален с математической точки зрения, однако психологи не спешат называть систему принятия решения человека нерациональной, вероятно, считают они, в «подгонке» также содержится некоторый скрытый смысл. Этот смысл они видят в том, что разнородность реакции имеет для человека определенную ценность, является, возможно, свидетельством большей интеллектуальности.

Вторая нерациональная черта человека – наличие критерия потребления – заклю-

чается в установлении определенного уровня выгоды, при достижении которого система прекращает работу, считая, что задача решена. Под руководством С.Зигеля и Л.Фурейкера был проведен следующий эксперимент [1]: были организованы группы студентов (по 2 человека в группе), где один из них был продавцом, второй – покупателем. Целью эксперимента было узнать, насколько уровень притязаний (заранее заданный студентам) повлияет на цену, на которой сговорятся стороны (по сути, игра состояла в разделе 10 долларов между игроками). В результате, в десяти из одиннадцати пар, участвующих в эксперименте, наблюдалась одна и та же картина: студенты, имеющие более низкие притязания, заработали меньше, чем студенты с более высокими притязаниями. Основываясь на полученных экспериментальных результатах, преобразуем критерий Байеса в общее правило принятия решения по критерию потребления:

Стратегия  $A_{i_0}$  оптимальна при уровне притязаний (по выигрышу  $\gamma$ ), если:

$$\tilde{a}_{i_0} = \min\{\tilde{a}_i | \tilde{a}_i \geq \gamma\}$$

Если же речь идет о матрице рисков, то стратегия  $A_{i_0}$  оптимальна при приемлемом уровне риска, равном  $\gamma$ , если:

$$\tilde{r}_{i_0} = \max\{\tilde{r}_i | \tilde{r}_i \leq \gamma\}$$

где  $\tilde{a}_i$  – показатель эффективности стратегии  $A_i$  по критерию Байеса относительно выигрышей, а  $\tilde{r}_i$  – показатель неэффективности стратегии  $A_i$  по критерию Байеса относительно рисков.

Подведем итог: критерий оптимальности в теории игр с природой, а именно, критерий Байеса, является фундаментальным для задач психофизики. Однако, как показывает практика, в жизни люди редко используют стратегии, оптимальные с точки зрения теории игр. Введение в критерии оптимальности поправок на свойственные человеку нерациональные черты позволит увеличить точность модели, описывающей его поведение.

### Литература

1. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. – М.: Прогресс, 1979. – 504 с.
2. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом: Учеб.пособие. – М.: Дело, 2001. – 464 с.
3. Леонов Ю.П. Теория статистических решений и психофизика. – М.: Наука, 1977. – 223 с.
4. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. – СПб.: Питер Ком, 1999. – 720 с.
5. Шендяпин В.М., Барабанщиков В.А., Скотникова И.Г. Уверенность в решении: моделирование и экспериментальная проверка. – Экспериментальная психология, 2010, том 3, №1, с.30–57

### Иллюстрации

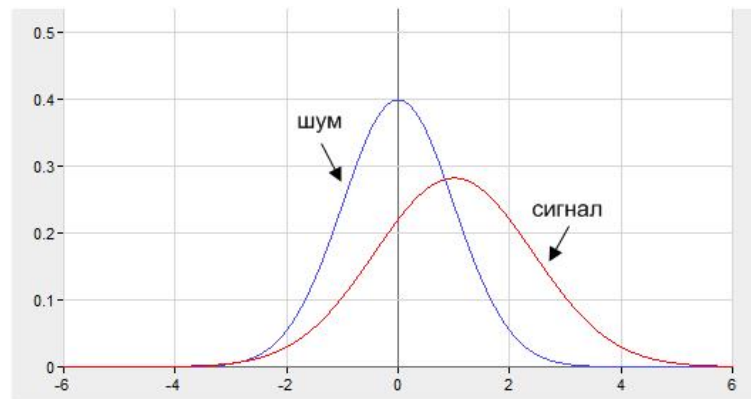


Рис. 1: Плотности распределения шума и сигнала

$$R =$$

$A_i \backslash \Pi_j$	$\Pi_1$	$\Pi_2$
$N x$	0	10
$Sn x$	5	0

Рис. 2: Матрица рисков R

$$A =$$

$A_i \backslash \Pi_j$	$\Pi_1$ (белая) $q_1 = 0.8$	$\Pi_2$ (зеленая) $q_2 = 0.2$	$\bar{a}_i$
$A_1$ (белая)	1	0	$\bar{a}_1 = 0.8$
$A_2$ (зеленая)	0	1	$\bar{a}_2 = 0.2$

Рис. 3: Игровая матрица